Office-Peter

OCT 12 1925

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Leitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 16. Ausgegeben am 17. September 1925. No. 692. Printed in Germany. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Lorenz, Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr.

H. Busch, Methode zur Messung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktion, insbesondere bei Variometern.

H. Hermann, Zur Carnotisierung des Dampfarbeitsvorgangs.

Zusammenfassende Berichte:

L. Schiller, Das Turbulenzproblem und verwandte Fragen.

Besprechungen:

B. Bauch, Das Naturgesetz.

W. Ludwig, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3. Teil.

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. 4. Bd., 1. Abt.

Joh. v. Kries, Immanuel Kant und seine Bedeutung für die Naturforschung der Gegenwart.

Personalien.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

MAX PLANCK

Einführung in die theoretische Physik

1. Band. Einführung in die allgemeine Mechanik. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. 3. Aufl. VII und 226 Seiten. Mit 43 Fig. Gr. 8°. 1921. Geh. M. 4.—, Pappbd. M. 5.50.

Dies Buch behandelt in einer getrost als klassisch zu bezeichnenden Einheitlichkeit des Aufbaues die Kinematik und Statik der elastisch-festen Körper. . . . . Allen Ingenieuren, die den Wunsch haben, ihre Mechanik-Kenntnisse zu „normalisieren" und über diese einen einheitlichen Überblick einschl. der der Physik geläufigen, logisch sich von selbst als notwendig ergebenden, Erweiterungen zu gewinnen, kann das Buch in allererster Linie empfohlen werden. (Werft-Reederei-Hafen.)

2. Band. Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. 2. Auflage. V und 193 Seiten. Mit 12 Figuren. Gr. 8°. 1922. Geh. M. 4.—, Pappbd. M. 5.50.

Die Darstellung des Stoffes zeigt die von den zahlreichen früheren Werken des Verfassers her bekannte Klarheit und Anschaulichkeit. Das Buch mag ganz besonders denjenigen Ingenieuren empfohlen werden, die die Absicht haben, sich mit der modernen mathematisch-physikalischen Literatur eingehender zu befassen. Sie werden durch das Buch in die charakteristische Darstellungsart der Universitätsleute in sehr schöner Weise eingeführt. (Zeitschr. d. Ver. dtsch. Ingenieure.)

3. Band. Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Zum Gebrauch bei Vorträgen sowie zum Selbstunterricht. V und 208 Seiten. Mit 12 Figuren. Gr. 8°. 1922. Geh. M. 4.—, Pappbd. M. 5.50.

Der große Physiker und Schöpfer der Quantentheorie hat mit diesem Buch den dritten Band seines modernen Pentateuchs der „Einführung in die theoretische Physik" herausgebracht. Der Physiker, der das Buch zur Hand nimmt, und auch der Studierende — solchen sei es besonders empfohlen — wird hier (wie auch schon in der Mechanik und Thermodynamik) entzückt sein von der Klarheit und Einheitlichkeit, mit der das Gerippe des unendlich verzweigten Gebietes von dem Leitsatze der Energieerhaltung aus vor ihm aufgebaut wird. Man lasse sich durch das benutzte Rüstzeug der Vektoranalyse nicht abschrecken; denn es ist hier wie überall, daß gerade diese scheinbare Erschwerung in Wahrheit eine ungeheure Vereinfachung der Probleme bedeutet. (Berliner Tageblatt.)

4. Band. Einführung in die theoretische Optik. (In Vorbereitung.)

Physikalische Rundblicke

Gesammelte Reden und Aufsätze. IV und 168 Seiten. Gr. 8°. Pappbd. M. 5.50, Halblederbd. M. 8.—.

Inhalt: Die Einheit des physikalischen Weltbildes. — Die Stellung der neueren Physik zur mechanischen Naturanschauung. — Neue Bahnen der physikalischen Erkenntnis. — Dynamische und statistische Gesetzmäßigkeit. — Das Prinzip der kleinsten Wirkung. — Verhältnis der Theorien zueinander. — Das Wesen des Lichts. — Die Entstehung und bisherige Entwicklung der Quantentheorie.

Das Buch stellt eine glückliche Vereinigung von Vorträgen und Aufsätzen des bekannten Gelehrten dar. Von hoher Warte aus behandeln sie allgemein interessierende Fragen unter Berücksichtigung neuerer Forschungen. (Frankfurter Ztg.)

Vom Relativen zum Absoluten

Gastvorlesung, gehalten in der Universität München
am 1. Dezember 1924.
Preis M. 1.25.

Plancks elementares Wirkungsquantum und die Methoden zu seiner Messung.

Von Rudolf Ladenburg.

62 Seiten. Mit 12 Abbildungen. 8°. 1921. Geh. M. 2.—

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 16. 15. August 1925. 26. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 18 am 5. September 1925.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Lorenz, Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr. S. 557.

H. Busch, Methode zur Messung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktion, insbesondere bei Variometern. S. 563.

H. Hermann, Zur Carnotisierung des Dampfarbeitsvorgangs. S. 565.

Zusammenfassende Berichte:

L. Schiller, Das Turbulenzproblem und verwandte Fragen. S. 566.

Besprechungen:

B. Bauch, Das Naturgesetz. S. 595.

W. Ludwig, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3. Teil. S. 595.

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. S. 596.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. 4. Bd. 1. Abt. S. 596.

Joh. v. Kries, Immanuel Kant und seine Bedeutung für die Naturforschung der Gegenwart. S. 596.

Personalien. S. 596.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr.

Von H. Lorenz.

1. Erfahrungsgrundlagen.

Bewegt sich eine tropfbare Flüssigkeit gleichförmig durch ein wagerechtes Rohr, so zeigen zwei in der Achsenrichtung um z_0 voneinander entfernte Manometer einen Druckunterschied, der mit diesem Abstand selbst wächst und, da keine Hubarbeit geleistet oder verzehrt wird, nur von den Bewegungswiderständen herrühren kann. Bei langsamer Strömung ist dies sogenannte Druckgefälle der mittleren, aus der Druckflußmenge hergeleiteten Stromgeschwindigkeit w und dem Kehrwert des Rohrquerschnittes πr_0^2 verhältnisgleich, so zwar, daß der Ausdruck

$$\frac{r_0^2}{w}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{r_0^2}{w}\frac{p_1 - p_2}{z_0} = C \qquad (1)$$

für jede Flüssigkeit einen nur mit der Temperatur veränderlichen Wert besitzt. Verwendet man nach dem Vorgang von O. Reynolds ein durchsichtiges Rohr und fügt in diesem einen gefärbten Flüssigkeitsfaden vom gleichen Raumgewicht der andern Flüssigkeit bei, so zieht sich derselbe ohne Vermischung durch das ganze Rohr hindurch, woraus man auf eine Parallelströmung aller Stromfäden schließen darf. Stört man diese Bewegung etwa durch Einführung eines unregelmäßig gestalteten Körpers in das Rohr, so stellt sich doch in einiger Entfernung hinter dem Körper die Parallelströmung von selbst wieder her und darf mithin als eine stabile Bewegungsform angesprochen werden.

Überschreitet man aber unter stetiger Zunahme des Druckgefälles eine für jede Flüssigkeit und jeden Rohrhalbmesser bestimmte mittlere Stromgeschwindigkeit, so erleiden die gefärbten Flüssigkeitsfäden erst seitliche Schwankungen und vermischen sich schließlich mit dem Gesamtstrom. Bei dieser turbulenten Strömung nähert sich mit wachsender Geschwindigkeit das mit einem Beiwert behaftete Druckgefälle dem Verhältnis des Stromgeschwindigkeitsquadrates zum Halbmesser, so daß also mit dem Raumgewicht γ und der Erdbeschleunigung g

$$\frac{2gr_0}{\gamma w^2}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2gr_0}{\gamma w^2}\frac{p_1 - p_2}{z_0} = \lambda \qquad (2)$$

ist, das im Grenzfalle $w = \infty$ für jede Flüssigkeit und jede Beschaffenheit der Rohrwand (Rauheit) einen auch von der Temperatur unabhängigen Festwert annimmt. In beiden Bewegungszuständen haftet die Flüssigkeit an der Rohrwand, besitzt also unmittelbar an derselben keine Geschwindigkeit, die vielmehr bei der Parallelströmung nach der Mitte hin stetig zunimmt, während sich diese Zunahme bei der Turbulenz in der Hauptsache auf eine dünne Randschicht bei fast gleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung im Kernquerschnitt innerhalb derselben beschränkt.

Den unstetigen Übergang der beiden Bewegungszustände erkennt man deutlich in Schaubildern, in denen wie bei Saph-Schoder und Biel[1]) entweder der Bruch $\frac{\partial p}{\partial z} : w$ in Abhängigkeit von w oder aber nach dem Vorgange von Blasius[2]) $\lg \lambda$ als Funktion von $\lg w$ mit starker Verzerrung aufgetragen ist:

1) Biel, Über den Druckverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteil. über Forschungsarbeiten a. d. Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 44. Ver. d. Ing. Berlin 1907; A. Tichelmann, Die Bewegungswiderstände des Wassers in Rohrleitungen. Gesundheitsingenieur 1910, Nr. 20.

2) Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1912, S. 636.

2. Das Druckgefälle und die Schubspannung in der Flüssigkeit.

Bewegt sich eine Flüssigkeit gleichförmig in der Richtung z mit einer senkrecht hierzu veränderlichen Geschwindigkeit v, so herrscht zwischen zwei Schichten infolge der Bewegungswiderstände eine Schubspannung τ. Im zylindrischen Rohr sind diese Schichten ringförmig, so zwar, daß vom Innenradius r bis zum Außenradius $r+dr$ die Schubspannung auf $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr$ zunimmt. Auf der Länge dz erhalten wir daher einen Widerstand

$$2\pi \frac{\partial (\tau r)}{\partial r} dr\, dz,$$

der vom Druckunterschied $-\frac{\partial p}{\partial z} dz$ in der Ringfläche $2r\pi dr$ derart überwunden wird, daß

$$-r \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial (\tau r)}{\partial r} \tag{3}$$

gilt. Da nun in allen Querschnitten des Rohres in hinreichendem Abstande von den Rohrenden derselbe mittlere Bewegungszustand herrscht, und außerdem wegen der stetigen Rohrfüllung keine Radialströmungen auftreten, so ist das Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial z}$ unabhängig von r, die rechte Seite von (3) unabhängig von z und wir erhalten aus (3) durch Integration zwischen r und der Rohrmitte $r = 0$, wo aus Symmetriegründen $\tau = 0$ sein muß:

$$-r^2 \frac{\partial p}{\partial z} = 2\tau r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2\tau}{r}, \tag{3a}$$

also ganz allgemein eine mit dem Radius von der spannungsfreien Rohrmitte linear wachsende Schubspannung, wie bei der Verdrehung eines elastischen Kreiszylinders. Insbesondere ergibt sich für die Rohrwand mit $r = r_0$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2\tau_0}{r_0}, \tag{3b}$$

so daß also das Druckgefälle in einem Rohr nur von der zwischen der Wand und der strömenden Flüssigkeit herrschenden Schubspannung bedingt ist. Ausdrücklich sei noch bemerkt, daß die vorstehenden Beziehungen (3), (3a) und (3b) für jede gleichförmige Strömung im Rohr unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt gelten.

3. Die reine Parallelströmung.

Bewegen sich alle Flüssigkeitsteilchen parallel der Rohrachse, so stimmt die Stromgeschwindigkeit an jeder Stelle mit der wirklichen Geschwindigkeit v der einzelnen Flüssigkeitselemente überein, welche somit parallel zueinander bleibende Stromfäden bilden, die sich gegenseitig trotz radial verschiedener Geschwindigkeit nicht stören. In diesem Falle gilt der Newtonsche Ansatz für die Schubspannung

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{4}$$

worin μ den durch die innere Flüssigkeitsreibung bedingten Zähigkeitsbeiwert bedeutet. Mit (4) geht aber (3a) über in

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cdot r = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \tag{4a}$$

und liefert mit der Haftung der Flüssigkeit am Rande, d. h. mit $v = 0$ für $r = r_0$ durch Integration

$$\frac{\partial p}{\partial z} (r_0^2 - r^2) = 4\mu v \tag{5}$$

d. h. eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt (Fig. 1),

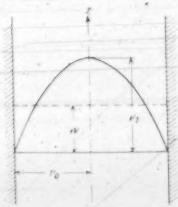


Fig. 1.

für die wir auch mit dem Scheitelwert in der Rohrachse

$$\frac{\partial p}{\partial z} r_0^2 = 4\mu v_1 \tag{5a}$$

schreiben dürfen:

$$v = v_1 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \tag{5b}$$

Daraus folgt die mittlere Stromgeschwindigkeit

$$w = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} v r\, dr = \frac{v_1}{2} = \frac{r_0^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6}$$

Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch durch Einsetzen des aus (5b) folgenden Geschwindigkeitsgefälles am Rande

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_0 = \left(\frac{dv}{dr}\right)_0 = -\frac{2v_1}{r_0} \tag{5c}$$

in die Gl. (4a). Gl. (6) steht übrigens im Einklang mit der Erfahrungsformel (1), bestimmt deren Festwert $C = 8\mu$ durch die Zähigkeit und gestattet die Ermittlung derselben durch einfache Rohrversuche.

4. Die turbulente Strömung.

Neben der eben besprochenen Parallelströmung ist aber in einem praktisch unendlich langen Rohr eine weitere Bewegungsform kinematisch möglich, nämlich eine sehr starke Zunahme der Geschwindigkeit in einer wirbelnden Prandtlschen Grenzschicht bis zu einem Betrage v_0. Wir erhalten hierbei im Längsschnitt des Rohres eine nahezu trapezförmige Geschwindigkeitsverteilung (Fig. 2), die in der

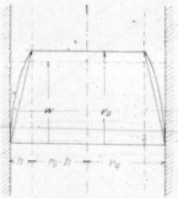


Fig. 2.

Grenzschicht von der Dicke h bei linearem Anstieg nach der Formel

$$v = v_0 \frac{r_0 - r}{h}; \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{v_0}{h} \tag{7}$$

verläuft und bei reiner Trapezform mit

$$w_0 r_0^2 = v_0 (r_0 - h)^2 + 2 \int_{r_0 - h}^{r_0} v r \, dr$$

die mittlere Stromgeschwindigkeit

$$w = v_0 \left(1 - \frac{h}{r_0} + \frac{1}{3} \frac{h^2}{r_0^2}\right) \tag{7a}$$

ergeben würde. Mit Rücksicht auf das in Wirklichkeit nicht lineare Ansteigen der Geschwindigkeit in der Grenzschicht wollen wir hierfür mit zwei neuen Beiwerten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ schreiben

$$w = v_0 \left(1 - \varkappa_1 \frac{h}{r_0} + \varkappa_2^2 \frac{h^2}{r_0^2}\right). \tag{7b}$$

Da nun in diesem Falle nach den Beobachtungen von Reynolds die Strömung von Querbewegungen einzelner Flüssigkeitsteilchen durchsetzt ist, die von der Randschicht ausgehen und in ihr wieder enden, so wollen wir diesem Umstande, der wohl auch die Abweichungen von (7) bedingt, durch eine andere Reibungsziffer $\mu_0 > \mu$ in der Formel (4) für die Randspannung Rechnung tragen und erhalten mit

$$\tau_0 = -\mu_0 \frac{v_0}{h} \tag{8}$$

für das Druckgefälle (3b)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 2 \frac{\mu_0 v_0}{r_0 h} \tag{9}$$

Im Kern würde demgegenüber bei reiner Parallelbewegung mit gleicher Geschwindigkeitsverteilung überhaupt kein Druckgefälle auftreten, wenn nicht die schon oben erwähnten Querbewegungen vorhanden wären. Diese Querbewegungen von Wirbeln verlaufen nach deren Ablösung von der Wand in krummlinigen Bahnen etwa nach Fig. 3 innerhalb der Gesamtströmung

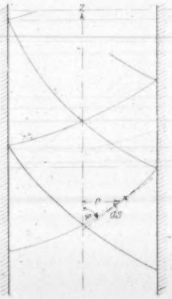


Fig. 3.

Fig. 4.

und zerstören die parallelen Stromfäden, so daß die Kerngeschwindigkeit v_0 an jeder Stelle nur einen zeitlichen Mittelwert der Axialgeschwindigkeit darstellt. Ist in Fig. 4 s der Weg eines wirbelnden Teilchens mit der Geschwindigkeit v, ϱ der Krümmungsarm der Bahn und n die Bahnnormale, so bestehen zunächst die Bewegungsformeln

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\partial v}{dt}, \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{v^2}{\varrho} \tag{10}$$

und mit einer Bahnneigung φ gegen die Rohrachse z im Längsschnitt

$$ds = dr \sin\varphi + dz \cos\varphi, \quad dn = dr \cos\varphi - dz \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial n}{\partial z} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial n}{\partial r} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial s}\cos\varphi - \frac{\partial p}{\partial n}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial s}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial n}\cos\varphi,$$

also nach Einsetzen von (10)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv}{dt}\cos\varphi + \frac{v^2}{\varrho}\sin\varphi, \\ -\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{dv}{dt}\sin\varphi - \frac{v^2}{\varrho}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

Soll nun im ganzen Querschnitt, also auch im Kern, derselbe Druck herrschen, so muß $\partial p : \partial r = 0$ sein und wir erhalten nach Ausschalten von $dv : dt$ aus diesen Formeln:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{\varrho}\sin\varphi \quad (10b)$$

oder, da die Einzelgeschwindigkeiten mit der Kerngeschwindigkeit und der Krümmungsarm mit dem Rohrhalbmesser wachsen, einen Mittelwert

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\lambda_0 \gamma v_0^2}{2 g r_0}. \quad (11)$$

Hierin stellt λ_0 einen mit der Zahl und Masse der querbewegten Wirbel wachsenden Beiwert dar, der wesentlich von der Rauhigkeit der Wand abhängen wird. Da nun das Druckgefälle über den ganzen Querschnitt denselben Wert haben muß, so folgt aus (9) und (11)

$$v_0 h = \frac{4\mu_0 g}{\lambda_0 \gamma}, \quad (12)$$

d. h. eine im verkehrten Verhältnis zur Kerngeschwindigkeit stehende Grenzschichtdicke. Diese nimmt also, was von vornherein einleuchtet, mit wachsender Stromgeschwindigkeit ab. Schalten wir dann noch die nicht unmittelbar meßbare Kerngeschwindigkeit v_0 mit Hilfe von (12) aus den Formeln (9) und (7b) aus, so erhalten wir

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\mu_0^2 g}{\lambda_0 \gamma r_0 h^2} = \frac{8\mu_0^2 g}{\lambda_0 \gamma r_0^3}\cdot\frac{r_0^2}{h^2} \quad (13)$$

und

$$1 - \varkappa_1 \frac{h}{r_0} + \varkappa_2^2 \frac{h^2}{r_0^2} = \frac{\lambda_0 \gamma w h}{4\mu_0 g}$$

oder

$$\frac{r_0^2}{h^2} - \frac{r_0}{h}\left(\varkappa_1 + \frac{\lambda_0 \gamma w r_0}{4\mu_0 g}\right) + \varkappa_2^2 = 0. \quad (14)$$

Durch Ausschaltung des Verhältnisses $r_0 : h$ aus den beiden Gl. (13) und (14) ergibt sich dann die gesuchte Abhängigkeit des Druckgefälles von der mittleren Stromgeschwindigkeit. Bevor wir dies durchführen, wollen wir indessen die beiden Gleichungen noch einer Umformung unterziehen, und zwar durch Einführung der durch Gl. (2) bestimmten Zahlengröße λ. Damit wird aus (13)

$$\lambda \frac{\gamma^2 w^2 r_0^2}{g^2} = 16\frac{\mu_0^2}{\lambda_0}\frac{r_0^2}{h^2}$$

oder nach Division mit dem Quadrat der Zähigkeit μ

$$\lambda_0 \lambda \frac{\gamma^2 w^2 r_0^2}{g^2 \mu^2} = 16\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\frac{r_0^2}{h^2}, \quad (13a)$$

worin ersichtlich der Ausdruck

$$\frac{\gamma w r_0}{g\mu} = R \quad (15)$$

die von den Abmessungen unabhängige, der Stromgeschwindigkeit verhältnisgleiche sogenannte Reynoldssche Zahl darstellt. Mit dieser wird aus (13a) und (14)

$$\lambda_0 \lambda R^2 = 16\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\frac{r_0^2}{h^2}, \quad (13b)$$

$$\frac{r_0^2}{h^2} - \frac{r_0}{h}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right) + \varkappa_2^2 = 0. \quad (14a)$$

Von den Wurzeln der letzteren Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_0}{h} &= \frac{1}{2}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - \varkappa_2^2}. \end{aligned}\right\} \quad (14b)$$

kommt nur diejenige mit positivem Vorzeichen in Frage, da das Verhältnis $r_0 : h$ nach Gl. (12) mit wachsender Stromgeschwindigkeit unbegrenzt zunimmt. Andererseits haben Werte von $r_0 : h < 1$ keinen Sinn, da die Grenzschicht höchstens das ganze Rohr erfüllen kann. Diesem offenbar instabilen Zustand der Erfüllung des ganzen Rohres mit gleichförmig am Rande abrollenden Ringwirbeln nach Fig. 5 entspreche der Wert R_0

Fig. 5.

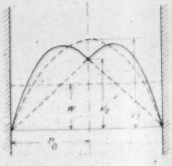


Fig. 6.

unterhalb dessen die Wurzel in (14b) imaginär wird, während sie für $R = R_0$ verschwindet. Die zugehörige Fig. 6 der Geschwindigkeitsverteilung läßt zugleich den plötzlichen Übergang aus der ebenfalls wirbelnden Parallelströmung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung erkennen. Für diesen kritischen Zustand gelten alsdann die Beziehungen

$$\frac{1}{2}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R_0}{4}\right) = \varkappa_2 = \frac{r_0}{h} = 1, \quad (16)$$

wodurch zunächst der Beiwert $\varkappa_2$ bestimmt ist, sowie

$$\frac{\mu}{\mu_0}\lambda_0 R_0 = 4\,(2-\varkappa_1);\quad 2>\varkappa_1. \tag{16a}$$

Dem Kleinstwerte von R auf der durch (13b) dargestellten Kurve, also mit $r_0 : h = 1$

$$\lambda_0 \lambda R_0^2 = 16\,\frac{\mu_0^2}{\mu^2} \tag{13c}$$

gehört aber auch der Schnittpunkt mit der Linie der Parallelströmung Gl. (6) zu, für die wir unter Einführung von λ an Stelle von $\partial p : \partial z$ durch Gl. (2) und (15) auch schreiben dürfen

$$\lambda\frac{\gamma w r_0}{g\mu} = \lambda R = 16. \tag{17}$$

Mithin ist auch $\lambda R_0 = 16$ und nach Einsetzen in (13c)

$$\lambda_0 R_0 = \frac{\mu_0^2}{\mu^2} \tag{17a}$$

und wegen (16a)

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 4\,(2-\varkappa_1). \tag{17b}$$

Durch diese beiden Formeln sind also die Beiwerte $\varkappa_1, \mu_0 : \mu$ und λ_0 der Turbulenz untereinander mit der sogenannten kritischen Zahl R_0 des Überganges von der Parallelströmung verknüpft.

5. Der Verlauf der Turbulenzkurve.

Die Gleichung der Turbulenzkurve, d. i. der Zusammenhang der Zahlenwerte λ und R folgt nunmehr aus der Verbindung von (13b) und (14b) mit $\varkappa_2 = 1$ zu

$$\frac{\lambda_0 \lambda R^2}{4}\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \left\{\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4} + \sqrt{\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - 4}\right\}^2, \tag{18}$$

oder

$$\frac{\lambda_0 \lambda R^2}{8}\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \left\{\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right\}^2 - 2 + \left\{\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right\}\sqrt{\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - 4}$$

und nach Division mit R^2

$$\frac{\lambda_0 \lambda}{8}\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \left\{\frac{\varkappa_1}{R} + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0}{4}\right\}^2 - \frac{2}{R} + \left\{\frac{\varkappa_1}{R} + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0}{4}\right\}\sqrt{\left(\frac{\varkappa_1}{R} + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 - \frac{4}{R^2}}. \tag{18a}$$

Daraus folgt zunächst, daß für $R = \infty$, $\lambda = \lambda_0$ wird, d. h. also, daß für sehr große Stromgeschwindigkeiten die Turbulenzgleichung in das rein quadratische Widerstandsgesetz im vollen Einklang mit der Erfahrung asymptotisch übergeht. Besonders übersichtlich wird der Kurvenverlauf (Fig. 7) der

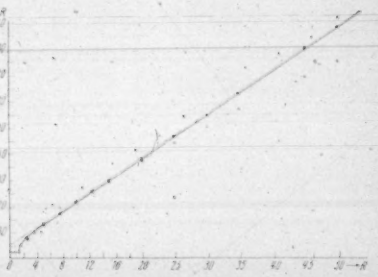


Fig. 7.

Abhängigkeit des Produktes λR von $\lambda_0 R$ dargestellt durch

$$\lambda R = \frac{4}{\lambda_0 R}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left\{\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4} + \sqrt{\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - 4}\right\}^2 = \frac{4}{\lambda_0}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\frac{x^2}{R}, \tag{18b}$$

woraus

$$\frac{d(\lambda R)}{dR} = \frac{4}{\lambda_0}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left\{\frac{2x}{R}\frac{dx}{dR} - \frac{x^2}{R^2}\right\} \tag{19}$$

mit

$$\frac{dx}{dR} = \frac{\lambda_0}{4}\frac{\mu}{\mu_0}\left\{1 + \frac{\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0}{4}R}{\sqrt{\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - 4}}\right\} = \frac{\lambda_0 \mu\, x}{4\mu_0\sqrt{\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0 R}{4}\right)^2 - 4}} \tag{19a}$$

hervorgeht. Da nun für den kritischen Wert $R = R_0$ die Wurzel verschwindet, so wird hierfür mit Rücksicht auf Gl. (16a)

$$\frac{dx}{dR} = \infty;\quad \left(\frac{x}{R}\right) = \frac{2}{R_0},\quad \left[\frac{d(\lambda R)}{dR}\right]_0 = \infty, \tag{19b}$$

woraus der plötzliche Übergang der Parallelströmung in die Turbulenz und die Instabilität des kritischen Zustandes erhellt.

Andererseits ist für $R = \infty$

$$\left(\frac{dx}{dR}\right)_\infty = \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\lambda_0}{2} = \left(\frac{x}{R}\right)_\infty;\quad \left[\frac{d(\lambda R)}{dR}\right]_\infty = \lambda_0, \tag{19c}$$

womit im Einklang mit $\lambda_\infty = \lambda_0$ nur ausgedrückt ist, daß die durch (18b) dargestellte Kurve der λR eine Asymptote mit dem Neigungstangens λ_0 besitzt.

Der Schnitt dieser Asymptote mit der Achse der λR folgt alsdann mit (18b) und (19)

$$(\lambda R)_0 = \left[\lambda R - R\frac{d(\lambda R)}{dR}\right]_\infty = \left| = \frac{8\mu_0^2}{\lambda_0 \mu^2}\left\{\frac{x^2}{R} - x\frac{dx}{dR}\right\}_\infty = 8x_1\frac{\mu_0}{\mu}, \right| \quad (19d)$$

also ist ihre Gleichung

$$\lambda R = 8x_1\frac{\mu_0}{\mu} + \lambda_0 R, \quad (20)$$

womit der Verlauf der Kurve der λR vom kritischen Punkte $\lambda_0 R_0 = 16$ bis ins Unendliche vollkommen gegeben ist.

Es sei übrigens noch bemerkt, daß sich die Kurvengleichung für große Werte von R noch vereinfachen läßt. Es darf nämlich

$$\sqrt{\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2 - 4} = x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\sqrt{1 - \frac{4}{\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2}}$$

für große R auch geschrieben werden in der Form

$$\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)\left(1 - \frac{2}{\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2}\right) = x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4} - \frac{2}{x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}},$$

womit dann (18b) übergeht in:

$$\lambda R = \frac{16}{\lambda_0 R}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left\{x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4} - \frac{1}{x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}}\right\}^2,$$

$$\lambda R = \frac{16}{\lambda_0 R}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left\{\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2 - 2 + \frac{1}{\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2}\right\},$$

oder

$$\lambda R = 8x_1\frac{\mu_0}{\mu} + \lambda_0 R - \frac{16(2 - x_1^2)}{\lambda_0 R}\frac{\mu_0^2}{\mu^2} + \frac{16\mu_0^2}{\mu^2\lambda_0 R\left(x_1 + \frac{\mu\lambda_0 R}{\mu_0 4}\right)^2}. \quad (21)$$

Vernachlässigt man in dieser Formel noch das letzte Glied, so erhält man für λR eine Hyperbel mit der Asymptote (20) mit dem Neigungstangens $\lambda_0 = \lambda_\infty$ und dem durch (19d) schon bestimmten Abschnitt auf der λR-Achse. Allerdings gilt die Näherungsformel (21) nicht mehr für den kritischen Wert R_0 und seine Umgebung.

Für die zahlenmäßige Verwertung unseres Ergebnisses, sowie für dessen Vergleich mit der Erfahrung ist es indessen gar nicht nötig, auf die Näherungsformel (21) zurückzugreifen. Es genügt vielmehr durchaus, die beiden Beiwerte x_1 und $\mu_0 : \mu$ mit Hilfe der Beziehungen (16a) und (17a) in $\lambda_0 R$ auszudrücken, womit die Gleichung der Turbulenzkurve und ihrer Asymptote die einfachen Gestalten

$$\lambda R = 4\frac{R_0}{R}\left\{2 + \frac{\sqrt{\lambda_0 R_0}}{4}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) + \sqrt{\left[2 + \frac{\sqrt{\lambda_0 R_0}}{4}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right)\right]^2 - 4}\right\}^2, \quad (22)$$

$$\lambda R = 16\sqrt{\lambda_0 R_0} - 2\lambda_0 R_0 + \lambda_0 R \quad (23)$$

annehmen. Hierin ist für zylindrische Rohre der Rauhigkeitswert λ_0 der schon längst in der Hydraulik bekannte Beiwert des für große Stromgeschwindigkeiten mit großer Annäherung gültigen quadratischen Widerstandsgesetzes (2), während der kritische Wert der Reynoldsschen Zahl, der den Einfluß der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit enthält, neuerdings von L. Schiller[1]) zu $R_0 = 1160$ ermittelt wurde.

Damit sowie mit $\lambda_0 = 0{,}01$ für glatte Rohre werden die Festwerte der Formeln (22) und (23)

$$\lambda_0 R_0 = 11{,}6, \quad \sqrt{\lambda_0 R_0} = 3{,}4, \quad \tfrac{1}{4}\sqrt{\lambda_0 R_0} = 0{,}85$$
$$16\sqrt{\lambda_0 R_0} - 2\lambda_0 R_0 = 31{,}2.$$

Hiermit sind die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte von λR berechnet und mit den von Blasius (a. a. O.) angegebenen Mittelwerten der Versuche von Saph und Schoder verglichen und in Fig. 7 eingetragen. Man erkennt daraus, daß die theoretische Kurve der λR sich den Beobachtungswerten von der

1) L. Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Zeitschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik, S. 435, 1921.

kritischen Zahl bis etwa $R = 20000$ fast vollständig anschmiegt und erst für große Geschwindigkeiten über den Versuchswerten verläuft. Dagegen haben gerade Versuche von Fritzsche[1]) mit Luft für höhere Geschwindigkeiten auch größere Werte von λ bzw. λR ergeben, die zum guten Teil noch oberhalb unserer theoretischen Kurve liegen. Bis auf weiteres dürfen wir also feststellen, daß die von uns abgeleitete Kurve die bisherigen Beobachtungen hinreichend genau wiedergibt, womit die ihr zugrunde liegende Auffassung der turbulenten Strömung und ihres Überganges in die Parallelbewegung gerechtfertigt sein dürfte.

Zahlentabelle.

R	$R : R_0$	λR ber.	λR beobachtet		
			Blasius	Fritzsche	für $R =$
1160	1,00	16	16		
1500	1,293	33,3	31,3		
2500	2,155	50,0	47,4		
3500	3,017	62,0	61,3		
5000	4,316	78,4	80	62	4650
7500	6,465	103,0	118	122	6450
10000	8,620	130	133		
12500	10,775	155	156	161	11000
15000	12,93	180	180	218	15500
20000	17,24	229	224	248	19000
25000	21,55	280	265	326	26500
30000	25,86	329	303	370	31000
35000	30,17	379	343	434	36000
45000	38,8	479	416	470	41000
				504	46000
50000	43,1	529	450	550	50000

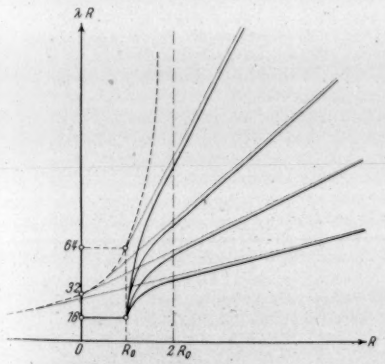


Fig. 8.

Da der kritische Wert R_0 von der Rauhigkeit λ_0 des Rohres unabhängig ist, so gehen alle Turbulenzkurven, deren Asymptotenneigungen nur durch λ_0 bestimmt sind, von dem gemeinsamen kritischen Punkte aus (vgl. Fig. 8). Die Asymptoten selbst hüllen dabei einen Hyperbelast nach der Gleichung

$$\lambda R = \frac{64 R_0}{2 R_0 - R} \qquad (24)$$

ein, der die Ordinatenachse im Punkte $\lambda R = 32$ schneidet und sowohl die Abszissenachse $\lambda R = 0$ als auch die Ordinate für $R = 2 R_0$ als Asymptote besitzt.

Zusammenfassung.

Auf Grund der Anschauung, daß im Falle der Turbulenz die Strömung in einen Kern mit gleichen zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit und eine Randschicht mit gegenüber der Parallelströmung viel stärkeren aber nicht linearen Geschwindigkeitsanstieg zerfällt, die im kritischen Übergangszustand gerade das Rohr ausfüllt, wird eine Gleichung für den ganzen Vorgang abgeleitet, welche als Festwerte nur noch die Rauhigkeitsziffer der Rohrwand, sowie die in der kritischen Reynoldsschen Zahl enthaltene Zähigkeit der Flüssigkeit besitzt und dabei die Beobachtungsergebnisse in weitem Umfange befriedigend wiedergibt.

Danzig, Lehrstuhl f. Mechanik d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 22. Juli 1925.)

Methode zur Messung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktion, insbesondere bei Variometern.

Von H. Busch.

1. Bei der Vergleichsmessung von Selbstinduktionen in der Wheatstoneschen Brücke mit Wechselstrom lautet die Bedingung für das Verschwinden des Brückenstromes bekanntlich

$$L_1 : L_2 = R_1 : R_2 = R_3 : R_4.$$

Diese zwei Bedingungen lassen sich nur erfüllen, wenn zwei Variationsmöglichkeiten vorhanden sind. Am bequemsten läßt sich das, wenn es nicht auf äußerste Präzision ankommt, durch Verwendung von zwei Gefälldrähten in der bekannten Schaltung nach Fig. 1 erreichen, in der AB den eigentlichen Meßdraht mit dem Schleifkontakt C darstellt und zwischen die Zweige 1 und 2 noch ein zweiter Meßdraht ab eingeschaltet ist, von dessen Schleifkontakt c die Brücke abzweigt; bei der Messung wird durch abwechselndes Verschieben der Schleifkontakte C und c auf das Minimum der Laut-

1) Fritzsche, Untersuchungen über den Strömungswiderstand der Gase in geraden zylindrischen Rohrleitungen, 1908. Forschungsheft 60 des Ver. d. Ing.

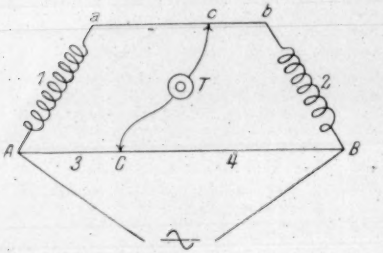


Fig. 1.

stärke im Telephon T und schließlich Verschwinden des Tons eingestellt. Wie schnell dieses Verfahren konvergiert, zeigt das Vektordiagramm Fig. 2, in dem die Verbindungsstrecke

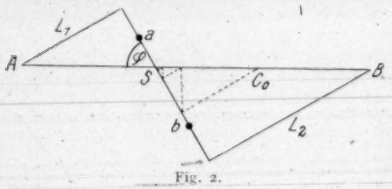


Fig. 2.

zweier Punkte den Vektor der zwischen den gleichbezeichneten Punkten in Fig 1 liegenden Spannung darstellt. Die sukzessiven Einstellungen der Kontakte C und c sind durch den punktierten Linienzug verbunden; man erkennt, wie z. B. bei dem in Fig. 2 gewählten Winkel

$$\varphi = 60^0, \text{ d. h. } R_1/L_1\omega = R_2/L_2\omega = 1/\sqrt{3}$$

jede folgende Einstellung die Abweichung eines der Schleifkontakte von seiner richtigen Stellung S auf die Hälfte vermindert, so daß nach je fünf Verschiebungen der Schleifkontakte die anfängliche Abweichung C_0S bereits auf $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx \frac{1}{1000}$ verringert wird.

2. Eine ähnlich bequem und schnell arbeitende Methode zur Messung gegenseitiger Induktionskoeffizienten ist bisher nicht bekannt, ein Mangel, der besonders fühlbar wird, wenn, wie z. B. bei der Eichung von Variometern für gegenseitige Induktion, größere Reihen von solchen Messungen auszuführen sind. Im folgenden will ich zeigen, wie man durch eine geeignete Abänderung der bekannten Maxwellschen Methode, durch die die Messung der gegenseitigen Induktion auf die einer Selbstinduktion zurückgeführt wird, zu einer Anordnung gelangen kann, die an Bequemlichkeit und Schnelligkeit der oben erwähnten Meßmethode für Selbstinduktionen gleichkommt.

Die Schaltung (Fig 3) entspricht in gewissem Sinne derjenigen der Fig. 1. Sie besteht, wenn wir zunächst von der Zusatzselbstinduktion L' und dem Zusatzwiderstande R' absehen, darin, daß die Primärspule L_1 der zu messenden gegenseitigen Induktion M mit einer bekannten Selbstinduktion L vom Widerstande R und

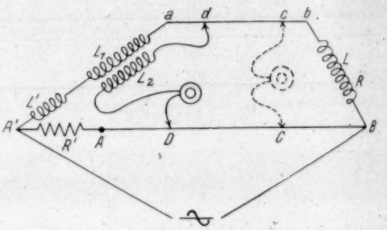


Fig. 3.

einem Meßdraht AB zu einer Wheatstoneschen Brücke verbunden wird, wobei zwischen L_1 und L ebenso wie in Fig. 1 ein zweiter Meßdraht ab geschaltet wird. Das Meßverfahren ist folgendes: Man legt das Telephon zunächst direkt an die beiden Schleifkontakte (punktierte Schaltung) und stellt, wie bei der Selbstinduktionsmessung, durch sukzessives Verschieben der Schleifkontakte auf Verschwinden des Tones ein; die hierzu erforderliche Stellung der Kontakte sei C und c. Sodann wird die Sekundärspule L_2 des Variometers in die Telephonleitung eingeschaltet (ausgezogene Schaltung) und in gleicher Weise auf Verschwinden des Tones eingestellt, wobei sich die Kontaktstellungen D und d ergeben. Dann folgt, wenn J_1 der Strom im Meßdraht AB, J_2 der Strom in L_1 und L ist, aus der Gleichheit der Potentiale in D und d einerseits, C und c anderseits:

$$J_1 \cdot DC = J_2 (dc + j\omega M), \tag{1}$$

$$J_1 \cdot CB = J_2 (cb + R + j\omega L) \tag{2}$$

(j bedeutet die imaginäre Einheit, ω die Kreisfrequenz), woraus man durch Division und Trennung der reellen und imaginären Teile erhält:

$$\frac{DC}{CB} = \frac{dc}{cb + R} = \frac{M}{L}, \tag{3}$$

$$M = L \cdot \frac{DC}{CB}. \tag{4}$$

DC, CB usw. bedeuten die Widerstände der betreffenden Drahtstrecken; statt dessen können in Gl (4), in der nur die Verhältnisse vorkommen, die betreffenden Drahtlängen gesetzt

werden. Damit ist die Bestimmung von M auf die Messung der beiden Längen DC und CB zurückgeführt.

3. Nach Gl. (3) muß

$$ab > dc > M\frac{R}{L} \qquad (5)$$

sein. Da R/L bei gegebener geometrischer Form der Vergleichsselbstinduktion angenähert konstant ist und bei Spulen gebräuchlicher Größe, z. B. den Einheitsrollen nach M. Wien, etwa 250—300 Ω pro Henry beträgt, bedeutet das, daß der Widerstand des Meßdrahtes ab im Ohm mindestens 300mal so groß sein muß wie der Betrag der zu messenden gegenseitigen Induktion in Henry. Da man mit dem Widerstande eines Meßdrahtes nicht gut über 10 Ω hinausgehen kann, ist die Anwendbarkeit der Methode auf gegenseitige Induktionen $M \leq 0{,}03$ Henry beschränkt.

Ist der Schleifdrahtwiderstand so klein oder M so groß, daß Bedingung (5) nur knapp erfüllt ist, so kann es vorkommen, daß eine der Einstellungen c oder d nicht mehr auf dem Meßdraht liegt; dann hilft Einschaltung eines geeigneten Zusatzwiderstandes links von a oder rechts von b, der im letzteren Falle induktionsfrei sein muß.

Ferner gilt, wenn man den Widerstand von L_1 mit R_1 bezeichnet, wie man leicht erkennt, die Beziehung:

$$\frac{R_1 + ad}{dc} = \frac{A'D}{DC} = \frac{L_1 - M}{M}. \qquad (6)$$

Daraus folgt

a) $L_1 - M$ ist vergleichbar mit M, L_1 muß also wesentlich größer als M sein[1]; ist das nicht der Fall, so ist eine geeignete Zusatzselbstinduktion L' zuzuschalten, deren Betrag nicht bekannt zu sein braucht.

b) $A'D$ ist vergleichbar mit DC, daher wird der Meßdraht AB schlecht ausgenutzt. Um dies zu vermeiden, verlängert man zweckmäßig den Meßdraht durch einen induktionsfreien Regulierwiderstand R', dessen Betrag ebenfalls nicht bekannt zu sein braucht. R' kann gleichzeitig dazu dienen, die Länge CB zwecks Vereinfachung der Rechnung auf eine runde Zahl, z. B. 500 oder 300 Skalenteile eines 1000teiligen Meßdrahtes einzustellen.

1) Meistens wird eine der beiden Spulen M diese Bedingung erfüllen (weil stets $L_1 L_2 > M^2$), so daß man diese als Primärspule wählen kann. Anderseits ist zu beachten, daß ein allzu großes L_1 wegen der Verringerung der Einstellgenauigkeit ungünstig ist, so daß es unter Umständen besser ist, als Primärspule diejenige mit der kleineren Selbstinduktion zu wählen und eine Zusatzspule L' zuzuschalten.

4. Die Methode ist besonders geeignet zur Durchmessung von Variometern, weil dann die Einstellung Cc nur einmal ausgeführt zu werden braucht. Ferner hat man hier den Vorteil, daß nach Gl. (3) die Strecken dc und DC wegen der Konstanz der Widerstände CB und $cb + R$ einander proportional bleiben, so daß, wenn erst eine Einstellung dD gefunden ist, die Auffindung der weiteren hierdurch wesentlich erleichtert und beschleunigt wird.

Kehrt innerhalb des Bereichs des Variometers M sein Vorzeichen um, so rücken die Punkte D und d rechts von C bzw. c, so daß man auch diese Teile des Bereichs durchmessen kann, soweit es die Länge der hierfür zur Verfügung stehenden Strecke cb erlaubt. Anderseits empfiehlt es sich aber nicht, zu diesem Zwecke etwa zu versuchen, die Strecke cb möglichst lang zu machen. Denn ein Verlängern von cb ist nur durch Vergrößerung des Widerstandes des Schleifdrahtes ab möglich, dieser muß aber im Interesse der Schärfe und der schnellen Konvergenz der Einstellung (Fig. 2) gerade möglichst klein[1] sein. Es ist deshalb besser, negative Werte von M dadurch zu messen, daß man die Sekundärspule des Variometers umpolt, etwa durch einen Quecksilberschalter mit 4 Näpfen, der gleichzeitig durch Einlegen eines Diagonalbügels die Einstellung Cc bei ausgeschalteter Sekundärspule auszuführen gestattet.

5. Zusammenfassung. Es wird eine neue Wechselstrom-Brückenmethode zur Messung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktion beschrieben, die einerseits auf der Maxwellschen Methode (Vergleich mit einer Selbstinduktion), anderseits auf der bekannten Selbstinduktionsmeßmethode mit zwei Gefälldrähten aufgebaut ist und die wegen ihrer Bequemlichkeit, Schnelligkeit und einfachen Auswertung besonders zur Durcheichung von Variometern geeignet ist.

1) Natürlich nur soweit es Bedingung (5) gestattet.

Jena, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 27. Juli 1925.)

Zur Carnotisierung des Dampfarbeitsvorgangs[1].

Von H. Hermann.

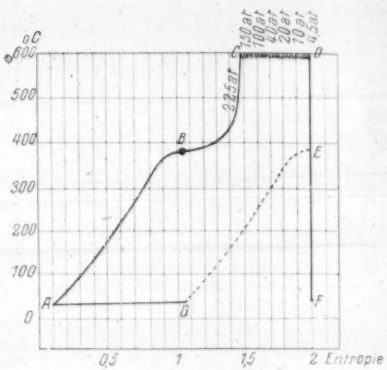
G. Zerkowitz hat in seiner Abhandlung „Das Gegendruckverfahren und seine Anwendung bei der Dampfturbine, III. Teil: Das Gegendruck-

1) Aus dem Vortrag „Fortschritte in der Kraftgewinnung aus Wärme" vor dem math.-nat. Verein in Württemberg. Nürtingen, 17. Mai 1925.

verfahren als Regenerativverfahren"[1]) bewiesen, daß bei Sattdampf durch Regeneration der Flüssigkeitswärme des Wassers (Anzapfdampf-Vorwärmung mit unendlich vielen Zwischenstufen) der Clausius-Rankinesche Arbeitsvorgang in den Carnotschen übergeführt wird.

Man denke sich dieses Verfahren bei einem Benson-Kessel[2]) bis zum kritischen Punkt angewandt, hierauf die Überhitzung, dann aber vor der adiabatischen eine isotherme Arbeitsleistung eingeschaltet. Je ausgedehnter diese ist, desto mehr nähert sich auch der Heißdampfarbeitsvorgang dem Carnotschen. Da die Überhitzungslinie am kritischen Punkt flach ansetzt (Entropie 1,05) und erst bei Entropie 1,5 sehr steil wird, Abb. 6, S. 74 im Sonderheft „Hochdruckdampf", erfordert dieser Gedanke eine immerhin beträchtliche Ausdehnung der Isotherme, welche im Entropiemaß die Größe einer halben Einheit wesentlich übertreffen muß.

Zur Verwirklichung dieses Gedankens bedürfte es der Konstruktion einer isothermen Höchstdruck-Vorschaltturbine, also einer in eine Feuerung eingebauten, oder da dies nicht möglich sein dürfte, einer Turbine, in welcher jedes Leitrad als Heizkörper ausgebildet ist und die Anfangstemperatur des Dampfes wiederherstellt. Die Isotherme ist alsdann durch eine Sägblattlinie aus Adiabaten und Isobaren ersetzt und die entsprechende Carnottemperatur geht flächenhalbierend durch die Sägezähne hindurch.



AB Kessel, *BC* Überhitzer, *CD* Isotherme Turbine, *DF* Adiabatische Turbine, *EG* Energetisches Äquivalent der Zwischendampfentnahme

Falls es auf Grund der Konstruktionsergebnisse an Gasturbinen gelingt, diese Temperatur auf 600°C zu halten, muß ein solcher Arbeitsvorgang theoretisch bei 30° Kondensatortemperatur $^2/_3$, praktisch $^2/_5$ der Verbrennungswärme der Kohle in mechanische Arbeit überführen.

(Eingegangen 20. Mai 1925.)

1) VDI-Zeitschr. 68, 1095, 1924.
2) VDI-Zeitschr. 67, 1166, 1923; auch in dem Sonderheft „Hochdruckdampf" S. 8 und S. 81, 1924.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Das Turbulenzproblem und verwandte Fragen.

Von Ludwig Schiller.

Inhaltsübersicht.

Vorbemerkung.
I. Die experimentellen Grundlagen.
A. Versuche zur Entstehung der Turbulenz.
1. Die Untersuchungen von Hagen.
2. Die Arbeiten von Reynolds, Barnes, Coker, Clement und Ekman.
a) Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz.
b) Die Bestimmung der „oberen kritischen Zahl" durch Reynolds, Barnes und Coker und Ekman.
c) Die Bestimmung der „unteren kritischen Zahl" durch Reynolds, Barnes, Coker und Clement.
3. Weitere Untersuchungen durch Druckmessung an Flüssigkeiten und Gasen.
4. Bestimmungen der kritischen Zahl mit anderen Methoden.
5. Das Widerstandsgesetz der Röhrenströmung nach dem Ähnlichkeitsprinzip.
6. Das laminare Widerstandsgesetz in der Anlaufstrecke und seine Bedeutung für die Bestimmung der kritischen Zahl.
7. Einfluß von Anfangsstörung und Anlauflänge auf die kritische Zahl.
8. Wandrauhigkeit und kritische Zahl.
9. Kritische Zahl bei anderen Berandungen.
10. Versuche mit rotierenden Flüssigkeiten.
B. Untersuchung der turbulenten Strömung.
1. Die Geschwindigkeitsverteilung.
2. Das empirische Widerstandsgesetz der turbulenten Rohrströmung.
II. Die theoretische Behandlung (folgt).

Vorbemerkung.

Die weitaus überwiegende Mehrzahl aller Bewegungen in Luft und Wasser, die wir in der Natur oder Technik sehen, ist turbulent: Der Wind in der Atmosphäre, die Strömung

im Fluß oder in den Schaufeln einer Turbine sind stets mehr oder weniger mit Wirbeln durchsetzt. Nur in verhältnismäßig seltenen Fällen treten diese Wirbel in regelmäßiger Anordnung auf („Kármánsche Wirbelstraße"), meist durchsetzen und durchwandern sie die Strömung in gänzlich unregelmäßiger Weise, und eben dieser Erscheinung trägt das Wort „Turbulenz" Rechnung[1]). Die außerordentliche Verbreitung der turbulenten Strömungen ist ein Grund dafür, daß auf ihr Studium schon viel Arbeit verwandt wurde; dies geschah also einmal wegen der praktischen Bedeutung der Gesetze, zum anderen aber auch wegen der außerordentlichen Schwierigkeiten, die sich ihrer exakten Erfassung und Begründung entgegenstellen.

In der dynamischen Meteorologie[2]) spielt die Turbulenz insofern eine wichtige Rolle, als sie den „virtuellen Reibungskoeffizienten" der Luft auf das 25000fache der physikalischen Konstanten erhöht, in fast allen technischen Fragen von Flüssigkeits- oder Gasströmung durch die Bedeutung, die sie für die Größe der auftretenden Widerstände, d. h. der aufzubringenden Arbeitsleistungen besitzt. Dies gilt in gleicher Weise für die Fortführung von Flüssigkeitsmengen durch Leitungen, Kanäle usw., wie auch für die Fortbewegung von Fahrzeugen durch Luft oder Wasser. Insofern fallen also fast alle praktisch vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen oder Bewegungen fester Körper durch Luft oder Flüssigkeiten in den Bereich des „Turbulenzproblems". Dieser hiermit sehr weit gefaßten Definition steht in der mathematisch-physikalischen Literatur eine verhältnismäßig sehr enge Bedeutung des „Turbulenzproblems" gegenüber, die sich auch kurz ausdrücken läßt durch „das Stabilitätsproblem der Hydrodynamik". Gemeint ist damit das Problem, den Übergang von laminarer in turbulente Strömung unter Voraussetzung bestimmter vorgegebener „Störungen" aus den hydrodynamischen Gleichungen heraus zu entwickeln, insbesondere ein „Stabilitätskriterium" hierfür abzuleiten. Neuerdings hat man jedoch auch in der mathematischer orientierten Literatur den Begriff des „Turbulenzproblems" insofern erweitert, als man zu der eben genannten Aufgabe noch die hinzugenommen hat, die fertig ausgebildete turbulente Bewegung, insbesondere die Verteilung der „Grundströmung" (d. h. des zeitlichen Mittelwerts der Geschwindigkeit an einer Stelle) hydrodynamisch zu berechnen, vielfach unter Hinzuziehung gewisser empirischer Tatsachen. Diese neuere Richtung knüpft sich vor allem an die Namen Prandtl, v. Kármán und Heisenberg.

Über das Turbulenzproblem im Sinne des Stabilitätsproblems ist vor einiger Zeit, von F. Noether verfaßt, eine vorzügliche zusammenfassende Darstellung in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erschienen, die hauptsächlich die mathematischen Gesichtspunkte behandelt. Im folgenden soll daher, auf den Wunsch der Schriftleitung und dem Arbeitsgebiet des Verfassers entsprechend, ein Bericht gegeben werden, der mehr die experimentellen Grundlagen in den Vordergrund rückt und insbesondere auch die wichtigen klassischen Arbeiten etwas ausführlicher behandelt, da diese einem großen Teil der Physiker weniger bekannt und vielleicht auch dem einen oder anderen schwerer zugänglich sind. Und zwar soll sich der Bericht — in Übereinstimmung mit der hauptsächlichen Entwicklung der theoretischen Forschungen — im allgemeinen beschränken auf die Strömung in Röhren und Kanälen (einschl. des sogenannten Couetteschen Falles), die Strömungsverhältnisse an umströmten Körpern dagegen nicht behandeln. Auch in dem hierdurch gesteckten Rahmen kann es nicht unsere Aufgabe sein, eine lückenlose Aufzählung aller einschlägigen Arbeiten zu geben, vielmehr allgemein nur der wichtigsten, die einen wirklichen Fortschritt brachten, wobei nach Möglichkeit die Priorität berücksichtigt werden soll.

I. Die experimentellen Grundlagen.

A. Versuche zur Entstehung der Turbulenz.

Bei den Versuchen, die hier besprochen werden sollen, handelt es sich im Wesentlichen um die Feststellung, unter welchen Bedingungen in Röhren oder Kanälen die eine Strömungsform, die „Laminarströmung"[1]), auftritt und unter welchen die „turbulente Strömung". Da die Versuche meist so angestellt werden, daß man ceteris paribus, d. h. bei gegebenen geometrischen Verhältnissen und gegebener Flüssigkeitsbeschaffenheit, entweder allmählich von kleinen zu großen Durchflußgeschwindigkeiten übergeht oder umgekehrt, so können wir auch sagen, es handelt sich bei den Versuchen im allgemeinen darum, zu untersuchen, bis zu welcher Geschwindigkeit hinauf die Laminarströmung aufrecht erhalten bleibt, bzw. bis zu

1) Diesem Gesichtspunkt der Ungeregeltheit entspricht die neuerlich vorgeschlagene Verdeutschung der „turbulenten Strömung" in „Flechtströmung" wesentlich schlechter.

2) Vgl. hierfür: F. M. Exner, Dynamische Meteorologie. Leipzig und Berlin 1917. S. 115.

1) Gelegentlich vorkommende Verdeutschungen hierfür sind: „Schichtenströmung", auch „Bandströmung".

welcher herunter Turbulenz herrscht, oder bei welcher Geschwindigkeit die eine Form in die andere übergeht, umschlägt. Die Feststellung erfolgt am zweckmäßigsten durch Widerstandsmessungen, bzw. Bestimmung des Druckabfalls längs einer gegebenen Meßstrecke. Denn jede der beiden Strömungsformen besitzt ihr eigenes Widerstandsgesetz: Für Röhren von kreisförmigem Querschnitt gilt bei laminarer Strömung das bekannte Poiseuillesche Gesetz, nach dem der Widerstand mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit wächst; bei turbulenter Strömung und glatter Wandung wächst er ziemlich genau mit der 1,75 ten Potenz und bei rauher Wandung und hohen Geschwindigkeiten mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Außerdem tritt beim Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung (ohne Änderung der Geschwindigkeit!) eine sehr wesentliche Erhöhung des Widerstandes auf das $1\frac{1}{2}$ fache, unter Umständen aber auch auf das 4 fache und darüber auf.

1. Die Untersuchungen von Hagen (1).

Ein beträchtliches Verdienst um die Förderung unserer Kenntnisse über die Strömungsverhältnisse in Röhren und Kanälen kommt dem Berliner Geh. Oberbaurat G. Hagen zu. Er hat nicht nur einen wesentlichen Teil des Poiseuilleschen Gesetzes bereits vor diesem experimentell aufgestellt, sondern auch — mehr als 30 Jahre vor Reynolds — mit ganz den gleichen Methoden, die dieser später benutzte, die, wie man wohl sagen muß, ersten systematischen[1]) Feststellungen über unser Problem gemacht. Daß er in beiden Fällen verhältnismäßig selten genannt wird, liegt daran, daß er seine schönen experimentellen Ergebnisse nicht völlig hat ausschöpfen können, da ihm der richtige leitende theoretische Gedanke fehlte. Im Gegensatz zu den meisten anderen Darstellungen trägt M. Brillouin in seinen Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz den Hagenschen Verdiensten immerhin ausführlich, wenn auch nicht vollständig sachlich, Rechnung.

Hagen hatte sich die Aufgabe gestellt, den von den damaligen Hydraulikern vernachlässigten Temperatureinfluß auf den Widerstand bzw. die Fördermenge des Wassers bei gegebenem Druck festzustellen. Er arbeitete mit drei Messingrohren von 1,4, 2,0 und 3,0 mm l. W. und im Temperaturintervall 3^0 bis 67^0. Eine tabellarische Zusammenstellung seiner Resultate in der Weise, daß immer eine Reihe einem bestimmten Druck entsprach (konstantes Niveau im Vorratstrog), zeigte ihm die auffallende Tatsache, daß bei steigender Temperatur (und konstantem Druck) die Durchflußgeschwindigkeit zunächst zunahm bis zu einem Maximum, dann sank bis zu einem Minimum und dann wieder anstieg. Noch deutlicher sichtbar wurde dies bei graphischer Auftragung, die nach dem Hagenschen Original in Fig. 1 wiedergegeben ist. Abszissen sind die Temperaturen, Ordinaten die mittleren Durchflußgeschwindigkeiten. Zu jeder Kurve gehört eine bestimmte konstante Druckhöhe. Die drei Rohre sind verschieden gekennzeichnet, die Kurven des engsten sind ausgezogen, die des mittleren gestrichelt und die des weitesten punktiert. Maximum und Minimum verschiebt sich bei jedem Rohr mit abnehmendem Druck, d. h. kleineren Geschwindigkeiten, nach rechts, d. h. nach höheren Temperaturen[1]). Hagen selbst hat bereits ausführlich versucht, eine gesetzmäßige Verknüpfung der unter den verschiedenen Versuchsbedingungen auftretenden Maxima sowohl wie Minima aufzufinden, bzw. ein gemeinsames Gesetz für sie aufzustellen. Und zwar müssen wir hier unterscheiden zwischen einer rein empirischen gesetzmäßigen Zusammenfassung seiner Beobachtungen und einem kühnen Versuch zu einer theoretischen Lösung des Turbulenzproblems. Mit dem ersteren ist Hagen sachlich schon außerordentlich nahe an das hingekommen, was wir heute „Reynoldssche Zahl" heißen, eine Tatsache, die ich in den neueren Darstellungen bisher nirgends richtig gewürdigt fand, wie auch die Fachgenossen zu Lebzeiten Hagens daraus keinen Nutzen zu ziehen wußten.

Zunächst stellt Hagen nach der in Fig. 1 gegebenen graphischen Darstellung eine Beziehung auf zwischen den Maxima (und Minima) der Geschwindigkeit und den zugehörigen Druckhöhen h und findet für sie:

$$h_{max} = \text{Const.}\ \frac{l}{a} \cdot \bar{u}^2_{max}, \qquad (1)$$

für die Minima eine entsprechende Gleichung mit einem anderen Wert der Konstanten. Hierbei bedeutet l die Länge, a den inneren Halbmesser des Rohres und $\bar{u}$ die über den Querschnitt des Rohres gemittelte Geschwindigkeit. Diese Beziehung ist völlig im Einklang mit dem unten mitzuteilenden Reynoldsschen Gesetz, das wir mit μ = Zähigkeit und ϱ = Dichte der Flüssigkeit schreiben können:

$$\bar{u}_{max} = \text{Const.}\ \frac{\mu}{a\varrho}, \qquad (2)$$

wie folgendermaßen leicht zu beweisen ist.

1) Die Existenz zweier Strömungsformen war schon früher bekannt. So nennt z. B. v. Mises in seiner „Technischen Hydromechanik" Bd. I hierfür Poncelet und St. Venant.

1) Das Wesentliche hierbei ist, wie wir weiter unten sehen werden: nach kleineren Zähigkeiten des Wassers.

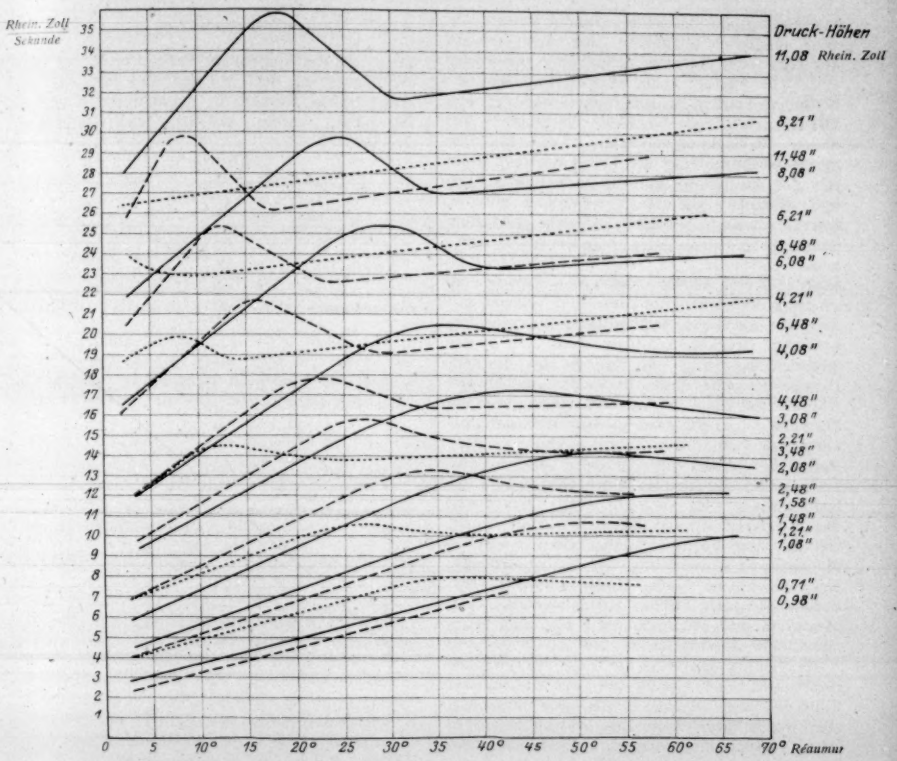


Fig. 1.

Nach dem für den ersten ansteigenden Kurvenast gültigen Poiseuilleschen Gesetz ist

$$h = \text{Const.}\,\frac{\mu \cdot \bar{u} \cdot l}{a^2}, \qquad (3)$$

also:

$$h_{max} = \text{Const.}\,\frac{\mu \cdot \bar{u}_{max} \cdot l}{a^2}. \qquad (4)$$

Dies eingesetzt in (1) gibt:

$$\frac{\bar{u}_{max} \cdot a}{\mu} = \text{Const.}, \qquad (5)$$

was dem Reynoldsschen Gesetz im Wesentlichen entspricht. Bloß die Dichte ϱ tritt nicht auf, da sie in Hagens Versuchen praktisch konstant war.

Ebenso kommt Hagen durch Prüfung der Beziehung zwischen $\bar{u}_{max}$ und der Temperatur, bzw. der nur temperaturabhängigen Größe μ, direkt zu dem gleichen Gesetz:

$$\frac{\mu}{\bar{u}_{max}} = \text{Const.}\, a\,. \qquad (6)$$

Allerdings fügt er hier nach den Beobachtungen noch eine kleine additive Konstante hinzu.

Abgesehen von diesen quantitativen formalen Feststellungen war sich Hagen über den physikalischen Grund für die jeweils in einem bestimmten Temperaturbereich auftretende Widerstandserhöhung völlig im Klaren. Durch Beobachtung des Ausflußstrahls bemerkte er, daß sein Verhalten sich beim Ausspritzen aus der Röhre regelmäßig änderte. Bei den tieferen Temperaturen stand er völlig ruhig, mit dem Aussehen eines festen Glasstabes. Bei stärkerer Erwärmung traten sehr auffallende starke Schwan-

kungen auf, die bei weitergehender Erwärmung zwar allmählich abnahmen, aber auch bei den höchsten Temperaturen nicht völlig verschwanden. Gleichzeitig stellte Hagen fest, daß die besonders starken Schwankungen stets auf dem abfallenden Ast der Kurve auftraten. Aus diesen Beobachtungen schließt er, daß die Widerstandserhöhung im Zusammenhang steht mit der Ausbildung von „inneren Bewegungen und Wirbeln", die einen wesentlich höheren Energieaufwand bedingen, als der einfachen Translation des Wassers parallel zur Röhrenachse entspricht. Er machte sich diese Tatsache dadurch deutlich sichtbar, daß er bei besonderen Versuchen mit Glasröhren zugleich mit dem Wasser Sägespäne durchtreiben ließ. Bei geringen Drucken schritten diese nur in der Achsrichtung fort, während sie bei starkem Drucke von einer Seite zur andern geschleudert wurden und oft in wirbelnde Bewegung kamen. Besonders interessant ist in diesem Zusammenhang eine Bemerkung Hagens über die Auslösung der Turbulenz. Er sagt nämlich, daß sie „durch jede kleinste Unregelmäßigkeit der Röhrenwand, oder vielleicht auch schon durch das Eintreten in die Röhre veranlaßt wird". Gerade diese beiden Möglichkeiten spielen in der weiteren Entwicklung der Turbulenztheorie eine wesentliche Rolle. Einer speziellen Diskussion Hagens für das Zustandekommen von Maximum und Minimum wird man sich heute nicht mehr anschließen.

Schließlich gibt Hagen noch auf knappen zwei Seiten eine quantitative Theorie für das Eintreten der Turbulenz, die zwar unrichtig, aber wegen ihrer Originalität und als historisch erster Versuch hier noch kurz skizziert sei: Die mittlere Geschwindigkeit steigt mit der ersten Potenz der Druckhöhe. Für die Geschwindigkeit in der Rohrachse nimmt Hagen den aus der (reibungslosen) Torricellischen Formel folgenden Betrag an, der mit der $^1/_2$ten Potenz der Druckhöhe steigt. Wenn beide Geschwindigkeiten gleich werden und damit die die Turbulenz verhindernde „Spannung" verschwindet, soll die Turbulenz auftreten. Er kommt so zu einer kritischen Geschwindigkeit bzw. Temperatur, die für seine mittlere Röhre merkwürdigerweise gut, für die beiden anderen aber wesentlich schlechter stimmt.

Wenn man von diesem und manchen anderen theoretischen Irrwegen absieht, so bleibt doch die in wesentlichen Punkten richtige empirische Ausdeutung seiner vorzüglichen Versuche. Wie gut diese Versuche tatsächlich waren, erkennt man am besten aus einer Darstellung seiner Ergebnisse in der heute üblichen Form der kritischen „Reynoldsschen Zahlen"

$$R = \frac{\bar{u} \cdot a}{\nu}$$

(ν = kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit). In der folgenden Tabelle sind für die drei Rohre zu den Maxima und Minima der Hagenschen Kurven die zugehörigen R-Werte angegeben, jeweils geordnet nach fallenden Drucken.

Tabelle I.

	Max.	Min.
Rohr I. $a = 0{,}1407$ cm	1253	1480
	1194	1360
	1140	1332
	1043	1505
	1017	
	969	
Rohr II. $a = 0{,}2015$ cm	1138	1205
	1083	1272
	1032	1302
	998	1168
	970	1246
	947	
	1044	
Rohr III. $a = 0{,}298$ cm	1062	1255
	925	1214
	970	1207
	$R_{max} = 1049$	$R_{min} = 1303$
	$R_{max, min} = 1176.$	

Nach den neuesten Untersuchungen fällt der Umschlag etwa auf den Wert $R = 1160$, der nach seiner besonderen, später genauer anzugebenden Definition etwa dem Hagenschen Maximum (oder einem etwas höheren Wert) entspricht. Sonach ist die Übereinstimmung eine ganz vorzügliche in Anbetracht dessen, daß Hagen seine Kurven und besonders seine Maxima mehr oder weniger interpolieren mußte.

2. Die Arbeiten von Reynolds, Barnes, Coker, Clement und Ekman.

a) Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz. Obwohl es sich bei den hier zu behandelnden Fragen wesentlich um theoretische Überlegungen handelt, so müssen sie doch hier im experimentellen Teil berücksichtigt werden, da das Ähnlichkeitsgesetz zur Einordnung der experimentellen Tatsachen von ungeheurer Wichtigkeit ist und seine Benutzung bei der Darstellung der im folgenden wiederzugebenden experimentellen Ergebnisse die höchstmögliche Sparsamkeit an Raum usw. bedeutet.

Reynolds (2) geht von folgender Überlegung aus: Die wesentliche Verschiedenheit der laminaren Strömung, wie sie in engen Röhren und bei kleinen Geschwindigkeiten auftritt, von der turbulenten in weiten Röhren und bei

großen Geschwindigkeiten scheint zunächst für eine Abhängigkeit der Strömung von den absoluten Größen der Länge, Geschwindigkeit usw. zu sprechen. Das kann jedoch nicht richtig sein; denn in den hydrodynamischen Gleichungen spielen diese Absolutwerte keine Rolle. Das, was auf Grund der Experimente als Abhängigkeit von Absolutwerten erscheint, muß also in Wirklichkeit Abhängigkeit von Relativwerten sein. Es handelt sich bloß noch darum, die richtigen Bezugsgrößen zu finden. Nun hatte Reynolds aber[1] beobachtet, daß bei höheren Temperaturen die Neigung zur Turbulenz wesentlich stärker wurde. Gleichzeitig wußte er, daß die „kinematische Zähigkeit" $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$, der Quotient aus Zähigkeit und Dichte, sehr stark mit der Temperatur sich ändert (und zwar mit steigender Temperatur abnimmt). Also hing die Neigung zur Turbulenz ab von der Röhrenweite, der Geschwindigkeit und $\frac{\mu}{\varrho}$ der Flüssigkeit. Da aber $\frac{\mu}{\varrho}$ die Dimension von Länge mal Geschwindigkeit hat, so war hierin augenscheinlich der Standard gefunden und der Betrag der „Dimensionslosen" $\frac{u \cdot a}{\nu}$ der für das Auftreten der Turbulenz maßgebende Ausdruck.

Zum gleichen Ausdruck kommt dann Reynolds auch noch durch folgende eigentliche „Ähnlichkeitsbetrachtung" der hydrodynamischen Bewegungsgleichung[2])[3]). Der — nicht direkt ausgesprochene — Leitgedanke ist der, daß bei geometrischer Ähnlichkeit der Begrenzungen in allen Fällen dann Turbulenz einsetzt, wenn auch die Strömung geometrisch ähnlich ist. Wann dies aber der Fall ist, zeigt uns unmittelbar die Differentialgleichung. Ähnliche Strömung ist in zwei Fällen dann vorhanden, wenn das Verhältnis der Geschwindigkeit (bzw. Geschwindigkeitskomponente) zu einer Standardgeschwindigkeit, etwa der mittleren Geschwindigkeit, für jeden Punkt im Fall I gleich ist dem entsprechenden Verhältnis für den entsprechenden Punkt im Fall II. Daß heißt: Die Lösungen der Differentialgleichung müssen in beiden Fällen identisch sein, wenn man statt der Koordinaten und Geschwindigkeiten die genannten „Dimensionslosen" einführt. Zu dieser Identität der Lösungen ist aber nötig, daß auch die Differentialgleichungen der beiden Fälle bis auf einen in allen Gliedern gleichen Faktor übereinstimmen. Macht man nun z. B. in der Differentialgleichung für die x-Achse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta u \qquad (7)$$

die Geschwindigkeiten und Koordinaten in der angegebenen Weise dimensionslos, so tritt z. B. im Glied $u\frac{\partial u}{\partial x}$ als einem Vertreter der Trägheitsglieder ein konstanter Faktor heraus: $\frac{\bar{u}^2}{a}$, im Reibungsglied $\frac{\mu}{\varrho}\Delta u$ noch der Faktor $\frac{\bar{u}}{a^2}$. Damit die Lösungen in den Dimensionslosen identisch werden, muß also sein:

$$\frac{\bar{u}_1^2}{a_1} : \frac{\bar{u}_2^2}{a_2} = \left(\frac{\bar{u}_1}{a_1^2}\cdot\frac{\mu_1}{\varrho_1}\right) : \left(\frac{\bar{u}_2}{a_2^2}\cdot\frac{\mu_2}{\varrho_2}\right) \qquad (8)$$

oder:

$$\frac{\bar{u}_1 \cdot a_1}{\nu_1} = \frac{\bar{u}_2 \cdot a_2}{\nu_2} \qquad (9)$$

oder:

$$\frac{\bar{u} \cdot a}{\nu} = \text{Const}, \qquad (10)$$

in Übereinstimmung mit dem oben bereits gewonnenen Resultat, als Bedingung für die sogenannte „mechanische Ähnlichkeit"[1]) und demnach nach dem Reynoldsschen Gedanken auch als Bedingung für den Eintritt der Turbulenz. Man nennt:

$$\frac{\bar{u} \cdot a}{\nu} = R \qquad (11)$$

die „Reynoldssche Zahl" und den Wert, bei dem der Umschlag eintritt, die „kritische Reynoldssche" Zahl R_K.

Hier sei noch auf eine interessante gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Zahl aufmerksam gemacht, die kürzlich v. Kármán (3) gegeben hat. Sie liefert an Stelle des obigen Ausdrucks die Dimensionslose:

$$R' = \frac{\bar{u}}{c}\cdot\frac{a}{\lambda}, \qquad (12)$$

worin c die Molekulargeschwindigkeit und λ die mittlere Weglänge bedeutet.

1) Augenscheinlich ohne Kenntnis der Hagenschen Versuche.

2) Diese entspricht inhaltlich weitgehend der — auch sicher von Reynolds nicht gekannten — 10 Jahre älteren Helmholtzschen Ähnlichkeitsbetrachtung, die jedoch keine Anwendung auf das vorliegende Problem gefunden hatte.

3) Die im folgenden gegebene Darstellung weicht von der sehr knappen Reynoldsschen Darstellung einigermaßen ab.

1) Durch Einführung weiterer Dimensionslosen für die übrigen Variablen ergeben sich mit den anderen Gliedern weitere Beziehungen für den Fall der mechanischen Ähnlichkeit, die uns jedoch augenblicklich nicht beschäftigen.

b) Die Bestimmung der „oberen kritischen Zahl" durch Reynolds, Barnes und Coker und Ekman. Zur Prüfung des Ergebnisses seiner theoretischen Betrachtungen wandte Reynolds zwei verschiedene Beobachtungsmethoden an. Das Nächstliegende war, die bei Strömung einer homogenen Flüssigkeit auch in einem durchsichtigen Glasrohr unsichtbaren Wirbel durch Beimengung einer fein verteilten Substanz sichtbar zu machen. Außerdem kamen Widerstandsmessungen in Frage. Denn die allgemeine Ansicht über den Strömungszustand im Bereich hoher Geschwindigkeiten, d. h. des quadratischen Widerstandsgesetzes, ging bereits dahin, daß hier Wirbelbewegungen vorliegen. Wenn der Übergang vom Poiseuilleschen zum quadratischen Gesetz mit dem Auftreten von Wirbeln zusammenhing, so mußten also auch Widerstandsmessungen zur Bestimmung der kritischen Zahl sich eignen. Dabei war Reynolds vor seinen Versuchen noch nicht ganz sicher, daß beides tatsächlich zusammenfällt[1]), vielmehr setzte er gerade auch die Beantwortung dieser Frage auf sein Versuchsprogramm.

Die Versuchsanordnung zur Sichtbarmachung der Wirbelbildung war folgende (vgl. Fig. 2):

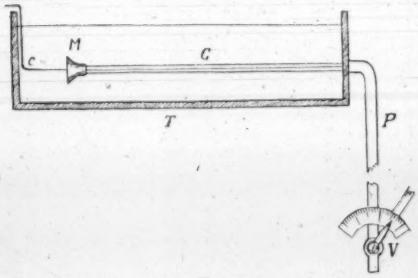


Fig. 2.

Ein Trog T, 183 cm lang, 46 cm hoch und 46 cm breit, die zwei Längswände aus Glas. Darin ein Glasrohr C von 2,7 cm l. W., das an der Einlauföffnung ein glattes, lackiertes trompetenförmiges Holzmundstück M trug, wobei besondere Sorgfalt auf völlig glatten Übergang in das Rohr verwandt wurde. Das andere Ende mündete durch ein Loch in der schmalen Seitenwand in ein Eisenrohr P von 5 cm l. W. Daran ein Hahn V zum Regeln der Durchflußgeschwindigkeit. Vor dem Mundstück, axial gerichtet, das Ende eines feineren Röhrchens c (1,9 cm l. W.), durch das, aus einer hochgestellten Flasche kommend, Farbstofflösung der Strömung mitgeteilt wurde, der Zufluß durch einen besonderen Hahn zu regeln. Zur Bestimmung der Durchflußmenge diente ein Schwimmer, der die Spiegelhöhe auf $^1/_5$ mm abzulesen gestattete. Thermometer an verschiedenen Stellen im Trog.

Vor Beginn des Versuchs wurde das Wasser nach Füllung des Trogs erst einmal vier Stunden stehen gelassen, um sich völlig zu beruhigen. Dann wurde bei langsamem Zufluß der Farbflüssigkeit der Hahn V ganz vorsichtig allmählich geöffnet. Dabei floß ein feiner gefärbter, scharf begrenzter Strahl längs der Achse des Glasrohres, die ungestörte Laminarströmung anzeigend. Dies blieb auch bei immer weiter gesteigerter Geschwindigkeit so, bis auf einmal, etwa 60 cm vom Ende des Glasrohres entfernt, sich der Strahl verbreiterte und für den Rest des Rohres die Farbe den ganzen Querschnitt erfüllte. Genauere Beobachtung, insbesondere bei kurzem Funkenlicht, zeigte als nähere Einzelheiten des Vorgangs am Anfang der Störung leichte Wellen, dann deutliche diskrete Wirbel. Beim Zurückgehen der Geschwindigkeit stellte sich wieder Laminarströmung ein.

Nachdem hiermit das Auftreten der Turbulenz bei einer ganz bestimmten Geschwindigkeit erwiesen war, ging Reynolds an die quantitative Prüfung seines Gesetzes. Dazu dienten außer dem genannten noch zwei andere Rohre von 1,5 und 0,8 cm l. W. Außerdem wurde zur Variation von ν mit verschiedenen Temperaturen gearbeitet, sowohl mit Kühlung durch Eis, als auch durch Erhitzung mit Dampf. Das letztere wurde nur in einigen wenigen Fällen ausgeführt, da sich zeigte, daß hier stets störende Strömungen im Trog auftraten, auch nach stundenlanger Beruhigung.

Zur Illustration dessen, wie gut diese ersten Versuche bereits das Reynoldssche Gesetz bestätigten, seien die Ergebnisse mit dem weitesten Rohr ($a = 1{,}34$ cm) in der folgenden Tabelle angegeben: Die erste Spalte enthält die Nummer des Versuchs, die zweite die Temperatur des Wassers, die dritte die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt, die vierte die kinematische Zähigkeit (nach heutigen besten Werten eingesetzt) und die fünfte die kritische Zahl.

Ziemlich ähnlich liegen und ungefähr die gleiche Streuung zeigen auch die Versuchsreihen

1) Wie oben mitgeteilt, war durch die Hagenschen Versuche dies bereits sichergestellt. Die Unkenntnis dieser Versuche bei Reynolds zeigt die Bemerkung: „Although it had been definitely pointed out that eddies would explain resistance as the square of the velocity, it did not appear that any definite experimental evidence of the existence of eddies in parallel tubes had been obtained, and much less was there any evidence as to whether the birth of eddies was simultaneous with the change in the law of resistance".

Tabelle II.

Nr.	t (°C)	a (cm)	$\nu \cdot 10^6$	R_K
1	8,3	62,7	13,8	6080
2	21	43,25	9,8	5910
3	15	53.74	11.4	6320
4	12	92 7	12.4	6775
5	13	58,78	12,1	6510
6	13	56.14	12,1	6230
7	13	58.78	12.1	6510
8	5	69.67	15,18	6160
9	5	72.35	15.18	6390
10	10	60,38	13,07	6210
11	11	58.7	12.9	6090
			Mittelwert	6290

mit den beiden anderen Rohren. Als Mittelwert aus allen Versuchen ergibt sich $R_K = 6410$[1]).

Gewisse Beobachtungen schienen Reynolds darauf hinzudeuten, daß bei größeren Störungen die Laminarströmung schon bei kleineren Reynoldsschen Zahlen instabil sein könnte als bei kleineren Störungen. Er wagt dies jedoch nicht sicher zu behaupten, da die Beobachtungsmethode nicht gestattete, festzustellen, ob die bei kleineren R durch ein in das Rohr eingebrachtes Hindernis hervorgerufenen Wirbel nicht wieder abklangen. Jedenfalls aber gewann er den Eindruck, daß irgendwelche Störungen, sei es im Trog oder im Rohr, die Voraussetzung für den Umschlag der Strömung bildeten.

In einer weiter unten noch zu besprechenden Arbeit sprechen Coker und Clement (4) auch gelegentlich über Versuche, die sie mit der gleichen Methode wie Reynolds, jedoch mit ganz besonderen Vorsichtsmaßregeln (Trog erschütterungsfrei auf Stein gelagert, tagelanges Stehenlassen des Wassers vor dem Versuch) ausführten und bei denen sie zu höheren Werten der kritischen Zahl wie Reynolds kamen. Sie sprechen auch — bestimmter als Reynolds — von einer Erniedrigung der kritischen Zahl durch Störungen und im Hinblick auf beides von einem „weiten Bereich der kritischen Zahl".

In gleicher Richtung liegt eine größere Arbeit von Barnes und Coker (5). Sie benutzen als Indikator für das Einsetzen der Turbulenz nicht Sichtbarmachung der Wirbel, sondern die Tatsache, daß der Wärmeübergang gegenüber der laminaren Strömung bei Turbulenz kräftig erhöht wird. Ähnlich wie bei Reynolds war wieder ein (Messing-)Rohr in einen Vorratstrog eingesetzt. Außerhalb des Trogs war das Meßrohr (1,95 cm l. W.) durch einen längeren weiteren Zylinder geführt, durch den heißes Wasser zirkulierte, dessen Temperatur in weiten Grenzen reguliert werden konnte. Hinter diesem Heizkörper war an das Meßrohr ein Glasrohr angeschlossen, das, axial gelagert, ein Quecksilberthermometer enthielt. An diesem Thermometer machte sich nun der Umschlag von laminarer in turbulente Strömung außerordentlich deutlich geltend. Solange laminare Strömung vorhanden ist, beschränkt sich die Erwärmung des strömenden Wassers durch die geheizte Wand auf die wandnahen Schichten, so daß das Thermometer nur eine geringe Erhöhung gegenüber der Temperatur des Vorratstrogs zeigt. Sobald jedoch Turbulenz einsetzt und damit das Wärmeleitvermögen konvektiv sehr stark erhöht wird, steigt auch das Thermometer plötzlich ganz stark an. Zu Messungen bei hohen Temperaturen wurde das Vorratswasser durch Dampf auf 90° geheizt und dann stehen gelassen. Wegen der sehr großen Ausmaße des Trogs (6 m hoch, 7,5 m² Querschnitt) dauerte die Abkühlung über eine Woche, während deren nun in dem ganzen Temperaturbereich gemessen werden konnte.

Bei normalen (Raum-)Temperaturen wurden mit dieser Methode und dem Farbstrahl bisweilen kritische Zahlen erreicht, die weit über den Reynoldsschen Wert hinausgingen; einmal erfolgte der Umschlag bei der höchstmöglichen Geschwindigkeit überhaupt erst durch scharfe Erschütterung. Die Höchstwerte sind nicht direkt angegeben, scheinen aber bei etwa $R_K = 18000$ gelegen zu haben. Noch höher kamen sie mit einem weiteren Rohr von 5,41 cm l. W. (etwa $R_K = 25000$), während ein engeres von 1,05 cm l. W. nur den Reynoldsschen Wert lieferte. Diesen scheinbaren Widerspruch mit dem Reynoldsschen Gesetz suchen Barnes und Coker damit zu erklären, daß bei weiteren Rohren die störenden Wandeinflüsse zurücktraten. Da gelegentlich auch umgekehrte Beobachtungen vorkommen, wird man den Grund besser in kleinen Verschiedenheiten am Einlauf zu suchen haben.

Auch die Versuche mit verschiedenen Temperaturen fielen insofern nicht sehr befriedigend aus, als die kritischen Zahlen bei den hohen Temperaturen (85°) ungefähr nur $^1/_2$ bis $^1/_3$ des Wertes bei 15° betrugen. Jedoch sehen Barnes und Coker mit Recht hierin kein Bedenken gegen das Reynoldssche Gesetz, da es unter anderen Versuchsbedingungen (s. unter c) in diesem Punkte gute Bestätigung fand.

Als letzte Arbeit aus diesem Kreis der „Arbeiten mit kleinsten Störungen" ist zu nennen eine Arbeit von Ekman (6), die annähernd 30 Jahre nach Reynolds an der oben beschriebenen Reynoldsschen Originalapparatur

1) Bei Reynolds selbst ist eine etwas anders definierte Konstante benutzt: $B_z = \frac{P}{2a \cdot u}$, worin P von Poiseuille stammende Zahlwerte sind, die proportional der Zähigkeit sind. Aus B_z erhält man R_K als $R_K = \frac{\ldots \cdot 10^4}{B_z \cdot 0{,}01783}$.

in Manchester ausgeführt wurde. Ekman verwendete besondere Sorgfalt auf die Beschaffenheit und Befestigung des Mundstücks, auf störungsfreien Ausfluß der Farblösung, die Identität ihres spezifischen Gewichtes mit Wasser usw. Auf diese Weise kommt er zu außerordentlich hohen kritischen Zahlen, etwa wie Barnes und Coker, im Maximum $R_K = 22000$. Hieraus folgert er bestimmt, daß es keine ausgesprochene kritische Geschwindigkeit bzw. Zahl gibt, daß diese vielmehr mit Abnahme der Störungen dauernd zunimmt[1]).

Es ist von Interesse, den allmählichen Wandel der Anschauungen über die Art der Turbulenzentstehung im Laufe der behandelten Untersuchungen festzustellen. Reynolds hatte erwartet, von einer „kritischen Zahl" ab ein allmähliches stetiges Anwachsen der Wirbelung zu finden. Statt dessen fand er den außerordentlich plötzlichen Umschlag, der ihm die Existenz einer hohen Labilität bewies. Jedoch sah er seine Voraussagen über eine „kritische Zahl" insofern gut bestätigt, als bei Vermeidung von Störungen, wie sie insbesondere bei höheren Temperaturen auftraten, die kritische Zahl sich gut konstant erwies (s. Tabelle II), die für ihn also die Bedeutung einer „oberen Grenze" der Laminarströmung annahm. Die genannten späteren Arbeiten zeigten jedoch bald, daß die Folgerung von Reynolds augenscheinlich nicht richtig war, daß vielmehr durch weiter gesteigerte Vorsichtsmaßnahmen, d. h. Vermeidung von Störungen, wie sie bei Reynolds noch vorlagen, diese „obere kritische Zahl" weiter und weiter gesteigert werden konnte, damit also eigentlich die Bedeutung einer festen Zahl verlor.

Dies hatte Reynolds wegen der auch von ihm schon beobachteten Erniedrigung der kritischen Zahl durch Störungen zu einem gewissen Grade auch schon selbst gefühlt. Da ihn jedoch die weitere theoretische Behandlung des Gegenstandes (s. unter II.) in seinem ersten Ergebnis bestärkt und wieder einen Festwert der kritischen Zahl ergeben hatte, so mußte nach seiner Ansicht eine zweite, tatsächliche „untere" kritische Zahl bestehen, dadurch charakterisiert, daß unterhalb ihres Wertes vorhandene Wirbel allmählich abklingen, oberhalb jedoch anwachsen und zur Turbulenz führen.

c) Die Bestimmung der „unteren kritischen Zahl" durch Reynolds, Barnes, Coker und Clement. Zu der experimentellen Bestimmung dieser unteren kritischen Zahl mußte das Versuchswasser mit einem möglichst hohen Grad von Störungen in das Versuchsrohr eingeleitet werden. Dadurch verbot sich die bisher benutzte Methode von selbst. An ihre Stelle trat die Messung des Widerstandes, entsprechend Reynolds' Vermutung, daß der Übergang zwischen den beiden Strömungsformen mit der Änderung des Widerstandsgesetzes zusammenfiele. Dies lag jetzt um so näher, als die obere kritische Zahl weit oberhalb dieses Punktes lag.

Die genügende Durchwirbelung war dadurch gegeben, daß das Versuchswasser unmittelbar der Wasserleitung entnommen wurde, deren Druck das Wasser durch die Meßrohre trieb. Die beiden zu den Versuchen verwendeten Rohre waren gewöhnliche Bleirohre mit schön glänzender Innenfläche und gut konstantem Durchmesser; l. W. 6,35 und 12,7 mm. Die Länge betrug bei jedem 5 m. Davon diente der größte Teil, etwa $^2/_3$, als „Beruhigungsstrecke", um den vorhandenen mitgebrachten Wirbeln Gelegenheit zum Abklingen zu geben, das letzte Drittel (1,524 m) als Meßstrecke. Von den Enden der Meßstrecke (an den Anbohrungen des Rohres wurde der Grat sorgfältig entfernt) führten Schläuche zu einem U-Rohr-Manometer, an dem der Druckabfall längs der Meßstrecke mit einem Spezialkathetometer abgelesen wurde. Als Manometerflüssigkeit diente für kleine Drucke Schwefelkohlenstoff, für größere Quecksilber.

Die Versuche ergaben folgendes: Solange die Geschwindigkeiten klein waren, stellte sich die Flüssigkeit im Manometer völlig ruhig ein. Bei steigender Geschwindigkeit kam dann plötzlich ein Punkt, an dem die Flüssigkeit im Manometer anfing, hin und her zu hüpfen und das vorsichtigste Weiteröffnen des Hahnes den Spiegel sofort weit aus dem Gesichtsfeld des Mikroskops hinausschnellen ließ, das Anzeichen einer plötzlichen starken Erhöhung des Widerstands. Als kritischen Punkt wählte Reynolds nicht den Beginn der Schwankungen, sondern den etwas höher liegenden Punkt der Widerstandsänderung, der durch graphische Darstellung der Geschwindigkeiten als Funktion des Druckabfalles scharf hervortrat. Zum gleichen Zweck benutzte Reynolds auch schon die seitdem in der Hydro- und Aërodynamik mehr und mehr in Gebrauch gekommene logarithmische Darstellung (Fig. 3), die den besonderen Vorteil bietet, aus der Neigung der Geraden sofort den Geschwindigkeitsexponenten des Widerstandes entnehmen zu können. Fig. 3 zeigt den Verlauf der Messungen für beide Rohre. C ist der kritische Punkt. Er ergibt sich (nach unserer Definition) für Rohr 5 (l. W. = 6,35 mm) bei 8° C zu $R_K = 1003$, für Rohr 4 (l. W. = 12,7 mm)

1) Während Reynolds selbst auf Grund seiner Messungen noch von einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit spricht, lauteten die Feststellungen von Barnes und Coker schon ganz in diesem Ekmanschen Sinne.

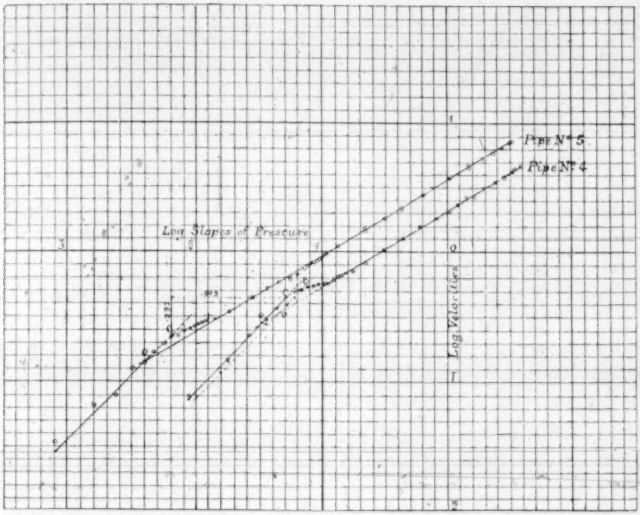


Fig. 3.

bei 0° C zu 1030 und bei 5° C zu 1064. Alles in allem jedenfalls eine recht gute Bestätigung des Reynoldsschen Gesetzes, mindestens betreffs der Durchmesserverschiedenheit.

Trotzdem erschien es weiterhin noch wünschenswert, das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz vor allem noch auf seine Zuverlässigkeit betreffs der Zähigkeit zu prüfen. Dieser Aufgabe galt eine Untersuchung von Coker und Clement (4), die mit Wasser im Bereich von 4 bis 50° C arbeiteten. Leider sind die sehr sorgfältigen Messungen insofern für den eigentlichen Zweck nicht recht auszunutzen, als sich die Verfasser bewußt darauf beschränkten, nur das rein laminare Gebiet und das völlig turbulente Gebiet zu messen, also nicht, wie Reynolds, den Punkt feststellten, wo die Laminarströmung endigte. Der höchste gemessene Laminarwert liegt bei $R = 1875$, der niedrigste turbulente bei $R = 3885$, der „kritische" also wohl in der Gegend von 2000 und damit annähernd beim doppelten Wert von Reynolds. Das kann nicht wundernehmen. Denn während Reynolds zur Feststellung der unteren kritischen Zahl mit gutem Bedacht insofern sauber definierte Bedingungen schuf, als er durch unmittelbare Entnahme aus der Wasserleitung, Führung um eine Ecke usw. für stärkste Störungen sorgte, ist dies hier nicht geschehen, so daß man also mangels definierter Bedingungen natürlich auch nicht zu einheitlichen Werten gelangen konnte. An Stelle der von Reynolds benutzten physikalisch wohl definierten kritischen Zahl setzen nun Coker und Clement, wie dies gelegentlich auch in späteren Arbeiten geschah, als kritische Zahl den Punkt, in dem sich die (logarithmische) Laminar- und Turbulenzlinie schneiden (Punkt O in Fig. 3) und finden für diesen bei ihren verschiedenen Temperaturen das Ähnlichkeitsgesetz gut bestätigt. Das besagt aber lediglich, daß für beide Bereiche das Ähnlichkeitsgesetz gilt, sagt aber nichts aus über die „kritische Zahl". Dies folgt sehr einfach daraus, daß diese bei 1000 liegt, der betreffende Schnittpunkt aber bei 600.

In ihrer späteren thermischen Untersuchung (s. o.) führten dann Barnes und Coker (5) auch Bestimmungen der unteren kritischen Zahl aus, die sich methodisch in bezug auf starke Anfangsstörungen wieder an Reynolds anlehnten. Das Wasser wurde unmittelbar der Leitung entnommen und in Spiralen durch einen elektrisch geheizten Trog geführt, ehe es in die Meßstrecke kam, jetzt natürlich stark durchwirbelt. Der Erfolg der von 6° bis 40° reichenden Messungen war insofern sehr schön, als sich Reynolds' Werte bis auf wenige Prozent, teilweise noch besser, ergaben, ohne daß bei Temperaturerhöhung eine systematische Abweichung sich herausstellte (s. die folgende Ta-

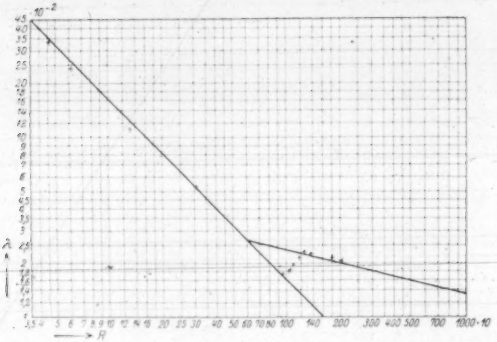


Fig. 4.

belle). Damit war die Bestätigung auch auf die Zähigkeit ausgedehnt.

Tabelle III.

Temp. °C	6	6	17.4	18.1	40.5
R_K	951	990	990	1018	963

3. Weitere Untersuchungen durch Druckmessung an Flüssigkeiten und Gasen.

Während in den bisher genannten Arbeiten stets Wasser als Versuchsflüssigkeit benutzt war, wurde in einer weiteren Anzahl von Untersuchungen die Prüfung des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes betr. der kritischen Zahl neben Wasser auch auf andere Flüssigkeiten und Gase ausgedehnt, auf die es ja auf Grund seiner Voraussetzungen gleichermaßen anwendbar sein mußte.

In erster Linie ist hier zu nennen eine ausgedehnte Untersuchung von Ruckes (7) über die Turbulenzerscheinungen bei Preßluft in Kapillaren aus Glas und auch solchen aus Metall. Hier interessieren uns zunächst die Versuche mit Glaskapillaren; auf die Metallkapillarenversuche wird unten noch zurückzukommen sein. Die Glasröhren hatten lichte Weiten von 0,123 mm bis 2,0 mm und Längen von 0,163 m bis 15,3 m. Die Versuche wurden bei kleinen Drucken mit einem Gasometer ausgeführt, bei großen (bis gegen 200 Atm.) mit einer Kompressoranlage. Der Kompressor arbeitete zunächst auf ein großes Reservoir, an das sich ein kleiner Behälter (eine Art Preßluftflasche) anschloß, dessen Kopf eine Stopfbüchse aus Rotguß trug, in welche die Kapillaren eingekittet waren. Von einer Beruhigung der Vorratsluft konnte natürlich so keine Rede sein, vielmehr wurde die Luft mehrfach um Ecken geführt, so daß die Versuchsverhältnisse mit denen in Parallele zu setzen sind, die Reynolds bei Bestimmung der unteren kritischen Zahl benutzte. Dem entsprechen auch die Ergebnisse, die eine vorzügliche Bestätigung des Reynoldsschen Gesetzes auch für Luft darstellen. Die erhaltenen kritischen Zahlen liegen zwischen 1002 und 1209. Fig. 4 zeigt den Verlauf einer Versuchsreihe der Kapillare 0,123 mm l. W. und 1,055 m Länge. Dabei ist die Auftragung in einer neuerdings üblichen, von Ruckes selbst noch nicht gebrauchten Weise erfolgt (s. u. S. 580): Widerstandskoeffizient λ als Funktion von R. Die Gerade mit 45° Neigung stellt das Poiseuillesche Gesetz dar, die andere das turbulente Gesetz. Man sieht bei den kleinen R-Werten sehr gute Übereinstimmung mit dem Poiseuilleschen Gesetz, dann deutlich ausgeprägt den kritischen Punkt und den Übergang zur Turbulenz.

Stanton und Pannell (8) führten mit Luft und Wasser Widerstandsbestimmungen in Messingröhren von 0,36 bis 1,255 cm Halbmesser aus und erhielten als kritische Zahlen Werte von 1070 bis 1125. Bei dem engsten Rohr bemerkten sie eine Tendenz, bis zu höheren Werten die Laminarströmung aufrecht zu erhalten.

Kohlrausch (9) arbeitete ebenfalls mit Luft und Messingröhren von 0,38 bis 1,79 cm l. W. und erhielt als kritische Zahl durchschnittlich $R_K = 1040$.

Neuerdings untersuchte Wildhagen (10) hochverdichtete Luft in Glaskapillaren von 0,02860 bis 0,06220 cm l. W. Bei den zwei weitesten (0,05665 und 0,06220 cm l. W.) erhielt er Werte für R_K zwischen 940 und 1350, für die engeren abweichend hiervon niedrigere Werte, was weiter unten noch zu diskutieren sein wird.

Untersuchungen über eine größere Reihe von organischen Flüssigkeiten liegen in ausgedehntem

Maße vor in einem großen Arbeitskomplex von Sorkau (11) und Ugarte (12), in denen ebenfalls wesentlich niedrigere kritische Zahlen auftreten. Auch sie werden zusammen mit ihrer später durch den Referenten erfolgten Aufklärung weiter unten besprochen werden.

Schließlich seien als letzte in diesem Kreis noch Messungen von Saph und Schoder (13) genannt, die in anderem Zusammenhang von größerer Bedeutung geworden sind. Sie sind mit Wasser und Messingrohren von 0,2722 bis 1,60 cm l. W. ausgeführt und ergeben kritische Zahlen zwischen 1000 und 1400.

4. Bestimmungen der kritischen Zahl mit anderen Methoden.

Die Änderung des Widerstandes beim Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hängt eng zusammen mit einer gleichzeitig eintretenden Änderung der Geschwindigkeitsverteilung längs eines Durchmessers des Rohres, wobei im Falle der Turbulenz unter Geschwindigkeit an einer Stelle der zeitliche Mittelwert der Axialkomponente der Strömung verstanden werden soll.

Die Untersuchungen der Hydrauliker über die Geschwindigkeitsverteilung in offenen Läufen (bei turbulenter Strömung) reichen bis ins 17. Jahrhundert zurück, während solche in Röhren erst Ende des letzten Jahrhunderts ausgeführt wurden. Hierbei ergab sich nun bei turbulenter Strömung eine Geschwindigkeitsverteilung, die wesentlich von der durch die Hagenbachsche Theorie der Laminarströmung gegebenen abwich, insofern als die Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt wesentlich gleichförmiger sich herausstellte. Sonach besteht auch die Möglichkeit, den Eintritt der Turbulenz und damit die kritische Zahl durch die entsprechende Veränderung in dem Bilde der Geschwindigkeitsverteilung festzustellen.

Das theoretische Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung für die Laminarströmung lautet:

$$u = u_{\max}\left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right). \qquad (13)$$

Hierin bedeutet u die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkt des Durchmessers, $u_{\max}$ die Geschwindigkeit in der Achse, r den Rohrhalbmesser und r' den Abstand des Meßpunktes von der Achse. Die Geschwindigkeitsverteilung ist also eine Parabel mit dem Scheitel auf der Rohrachse. Durch Integration der Geschwindigkeiten über den Querschnitt erhält man als sekundliches Durchflußvolumen

$$Q = u_{\max} \cdot \frac{\pi r^2}{2} \qquad (14)$$

und die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt F zu:

$$\bar{u} = \frac{Q}{F} = \frac{1}{2} u_{\max}. \qquad (15)$$

Eine direkte, wirklich befriedigende Prüfung dieser Gesetzmäßigkeiten durch den Versuch in Form einer experimentellen Aufnahme der Geschwindigkeitsverteilung oder wenigstens der Maximalgeschwindigkeit scheint erst in neuerer Zeit zum erstenmal durch Stanton und Pannell (8) ausgeführt worden zu sein und hat eine gute Bestätigung für die letzte Beziehung ergeben. Indirekt war die Bestätigung schon lange durch die vorzügliche Bewährung des Poiseuilleschen Widerstandsgesetzes gegeben. Die Messung der lokalen Geschwindigkeit erfolgt stets durch Einführung eines sogenannten Staurohres, d. i. ein feines Röhrchen, das mit seiner Öffnung dem Strom entgegengestellt den Gesamtdruck, d. h. Staudruck plus statischen Druck $\left(p + \frac{1}{2}\varrho u^2\right)$ mißt und an den einen Schenkel eines Manometers geführt wird, dessen anderer Schenkel mit einer Anbohrung der Wand im gleichen Querschnitt, wie die Öffnung des Staurohres, in Verbindung steht und lediglich den statischen Druck p aufnimmt. Die Einstellung des Manometers liefert dann als Differenz den sogenannten Staudruck $\frac{\varrho u^2}{2}$ und damit bei bekannter Dichte ϱ die gesuchte Geschwindigkeit u. Statt an einer Bohrung in der Wand kann man bei anderen Staugeräten (nach Prandtl u. a.) den statischen Druck auch an seitlichen Bohrungen des Staurohres selbst abnehmen.

Die älteren Versuche, aus der Änderung der Geschwindigkeitsverteilung die kritische Zahl festzustellen, sind insofern mangelhaft, als der Übergang dabei nicht aus der stationären völlig ausgebildeten laminaren Strömung heraus erfolgte, sondern aus einer durch zu kurze Rohrlänge bedingten veränderten Verteilung (s. darüber Näheres unter 6.), die selbst schon der turbulenten bis zu einem gewissen Grade ähnlich ist, wodurch die Feststellung der kritischen Zahl erschwert wird.

An erster Stelle ist zu nennen eine Arbeit von Morrow (14) mit einem Glasrohr von 5,088 cm l. W. und Wasser als Versuchsflüssigkeit. Die Messungen erstrecken sich von $\bar{u} = 1{,}435$ bis 8,075 cm/sec. Daß sie sich nicht glänzend für unseren Zweck eignen, sieht man aus folgender aus seinen Messungen zusammengestellten Tabelle:

Tabelle IV.

$\bar{u}$ =	1.435	2.196	2.995	4.100	5.373	8.075
$\frac{u_{max}}{\bar{u}}$ =	1.695	1.625	1.613	1.568	1.43	1.33

Auch bei der kleinsten Geschwindigkeit ist $\frac{u_{max}}{\bar{u}} = 2$ nicht vorhanden, nimmt vielmehr von 1,695 an dauernd ab. Trotzdem kann man mit einigem guten Willen Morrow folgen, wenn er aus einer geschickt gewählten graphischen Darstellung die kritische Zahl etwa bei 4 cm/sec, d. h. bei $R_K \sim 967$ feststellt.

Noch weniger geeignet sind Messungen von Fry und Tyndall (15) mit Luft und einem Rohr von 5 cm l. W., da es, im ganzen nur 45 cm lang, die Meßstelle bei ungefähr 30 cm, d. h. nur 6 Durchmesser vom Einlauf entfernt, trug. Die Verfasser selbst vermuten aus den Geschwindigkeitsverteilungen eine teilweise Turbulenz bereits bei $u = 22$ cm/sec, völlige bei 76 cm/sec, d. h. bei $R_K = 373$ bzw. 1290. Nach unseren eigenen späteren Feststellungen über die Abhängigkeit der kritischen Zahl von der „Anlauflänge" möchten wir bezweifeln, ob Fry und Tyndall auch bei 1300 überhaupt schon Turbulenz an der Meßstelle hatten und nicht vielmehr eine modifizierte laminare Verteilung wegen zu geringer Rohrlänge.

Gegenüber den zuletzt genannten Arbeiten erscheinen erstmals die Messungen von Kohlrausch (9), mit Luft einwandfrei. Kohlrausch hatte bis zu der Stelle, an der er die Geschwindigkeitsverteilung mit einem Staurohr aufnahm, einen Abstand von 50 bis 100 Halbmessern vom Einlauf. Seine Verteilungskurven für ein Glasrohr von 1,49 cm innerem Halbmesser lassen demgemäß auch die ungefähre Lage der kritischen Zahl dadurch deutlich erkennen, daß beim Übergang von $\bar{u} = 101$ cm/sec auf 140 cm/sec statt der gestreckten parabolischen Verteilung eine ausgesprochene Nivellierung eintritt mit verstärktem Abfall am Rand. Danach lag die kritische Zahl zwischen 940 und 1300.

Sehr schön sieht man den Übergang zwischen turbulenter und laminarer Strömung an Messungen von Stanton und Pannell (8) mit Luft und Wasser an einem Messingrohr von 0,36 cm Halbmesser. Sie bestimmten in einem sehr großen Bereich den Quotienten $\frac{\bar{u}}{u_{max}}$. Bei $R = 2000$ setzt ein plötzlicher starker Abfall des Quotienten von etwa 0,7 auf den der Laminarströmung entsprechenden Wert (s. oben!) von 0,5 ein.

Neben den bisher behandelten optischen, mechanischen und thermischen Methoden zur Feststellung der kritischen Zahl ist schließlich noch eine elektrische zu nennen: Dowling (16) setzte den Luftstrom einem radioaktiven Präparat aus, wodurch er ionisiert wird. An einem stromabwärts gelegenen Punkt wurde dann die Leitfähigkeit bestimmt. Da der Betrag der Rekombination wesentlich von dem Grad der konvektiven Durchmischung abhängt, so macht sich das Einsetzen der Turbulenz durch eine plötzliche starke Änderung des Ausschlags am Meßinstrument geltend.

In gleicher Weise eignen sich nach einer mir kürzlich durch Herrn Professor Coehn in Göttingen gemachten Mitteilung die Strömungsströme in Kapillaren vorzüglich zur Feststellung der kritischen Zahl. Diese Strömungsströme zeigen auch den Eintritt der Turbulenz durch kräftigen Anstieg an, und zwar erhielten die Herren Coehn und Reichardt auf diese Weise in ihrer Versuchsanordnung als kritische Zahl $R_K = 1260$.

5. Das Widerstandsgesetz der Rohrenströmung nach dem Ähnlichkeitsprinzip.

Ähnliche Betrachtungen, wie sie im Abschnitt 2a) zur Aufstellung des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes geführt haben, liefern auch eine allgemeine Aussage über die Form des Widerstandsgesetzes. Zu diesem Zweck betrachten wir jetzt noch besonders das das Druckgefälle enthaltende Glied in der Navier-Stokesschen Differentialgleichung (1. Glied der rechten Seite in Gl. (7)): $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$. Wir machen auch hierin wieder Druck und Länge durch Division mit Standardwerten dimensionslos. Als Längenbezugsmaß gelte wieder der Halbmesser a, als Druckmaß der Druck p an einer beliebig festgestellten Stelle. Dadurch erscheint als konstanter Faktor in diesem Glied $\frac{p}{\varrho \cdot a}$.

Für zwei ähnliche Strömungen ergibt sich dann, ganz wie unter 2a durch Kombination mit dem Faktor des Trägheitsgliedes für zwei entsprechende Punkte:

$$\frac{p_1}{\varrho_1 a_1} : \frac{\bar{u}_1^2}{a_1} = \frac{p_2}{\varrho_2 a_2} : \frac{\bar{u}_2^2}{a_2} \qquad (16)$$

oder

$$p = \text{Const}\, \varrho \bar{u}^2, \qquad (17)$$

wo Const = einer reinen, dimensionslosen Zahl ist. Wir fragen jetzt nach dem Druckunterschied zwischen zwei Querschnitten der beiden durchströmten Rohre im Falle ähnlicher Strömungen, bzw. nach dem Druckgefälle (pro Längeneinheit). Die entsprechenden Stellen der Rohre seien mit 1 und 1′ für das eine, mit 2 und 2′ für das andere bezeichnet. Nach Gl. (16) gilt:

$$\frac{p_1}{\varrho_1 \bar{u}_1^2} = \frac{p_2}{\varrho_2 \bar{u}_2^2} \qquad (18)$$

und

$$\frac{p_1'}{\varrho_1 \bar{u}_1^2} = \frac{p_2'}{\varrho_2 \bar{u}_2^2}. \tag{19}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man für die Druckdifferenz zwischen entsprechenden Punkten:

$$\frac{p_1 - p_1'}{\varrho_1 \bar{u}_1^2} = \frac{p_2 - p_2'}{\varrho_2 \bar{u}_2^2}. \tag{20}$$

Ist l_1 bzw. l_2 die Entfernung zwischen den betrachteten entsprechenden Querschnitten, so gilt wegen der Ähnlichkeit:

$$\frac{a_1}{l_1} = \frac{a_2}{l_2}. \tag{21}$$

Multipliziert man hiermit die letzte Gleichung, so folgt für das Druckgefälle längs des Rohres $\Delta p/l$ (pro Längeneinheit):

$$\frac{(\Delta p)_1}{\varrho_1 \bar{u}_1^2} \cdot \frac{a_1}{l_1} = \frac{(\Delta p)_2}{\varrho_2 \bar{u}_2^2} \cdot \frac{a_2}{l_2} \tag{22}$$

oder, da wir (wegen des unendlich lang gedachten Rohres) das gleiche Resultat für eine beliebige Ausgangsstelle erhalten würden, für beliebige Stellen:

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{a}, \tag{23}$$

wo C für ähnliche Strömungen, d. h. bei festem R eine Konstante ist. Bei Änderungen von R ändert sich auch C, das also eine Funktion von R ist; also allgemein:

$$\frac{\Delta p}{l} = f(R) \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{a}. \tag{24}$$

Über die Art dieser Funktion sagt die Ähnlichkeitsbetrachtung nichts aus. Sie ist also theoretisch oder experimentell besonders zu ermitteln.

Da es in der Hydraulik üblich ist, $\frac{\varrho \bar{u}^2}{2} = q$ als Staudruck zu bezeichnen, so wollen wir schließlich unser Widerstandsgesetz schreiben:

$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{2a}, \tag{25}$$

wo $\lambda = f(R)$.

Das gleiche Resultat erhält man auch, ohne auf die Differentialgleichung zurückzugehen, durch einfache Dimensionsbetrachtung. Voraussetzung dabei ist, daß durch Dichte, Zähigkeit, Geschwindigkeit und Halbmesser das Druckgefälle bestimmt sein soll, daß also außer diesen Größen keine anderen mehr in das Widerstandsgesetz eingehen. Außerdem setzen wir zunächst voraus, daß die Abhängigkeit von diesen Größen sich durch einfache Potenzen soll ausdrücken lassen.

Dann ist also:

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \mu^m \varrho^n a^p \bar{u}^q, \tag{26}$$

wo C eine reine Zahl sei. Die Dimension der linken Seite ist $m \cdot l^{-2} \cdot t^{-2}$; $[\mu] = \frac{m}{l \cdot t}$; $[\varrho] = \frac{m}{l^3}$; $[a] = l$; $[\bar{u}] = \frac{l}{t}$.

Aus Dimensionsgründen muß also sein:

$$\left.\begin{aligned} m + n &= 1 \\ m + 3n - p - q &= 2 \\ m + q &= 2 \end{aligned}\right| \tag{27}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} m &= 1 - n \\ p &= n - 2 \\ q &= 1 + n \end{aligned}\right| \tag{28}$$

wobei n noch unbekannt ist.

Setzen wir jetzt vorübergehend willkürlich $n = 1$, so erhalten wir $m = 0$, $p = -1$, $q = 2$, oder $\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{a}$ als eine in den Dimensionen richtige Gleichung. Um das vollständige Gesetz zu erhalten, müssen wir jedoch auf Gleichung (26) zurückgehen. Setzen wir hierin rechts $\varrho \frac{\bar{u}^2}{2}$ als Faktor heraus, so lautet sie:

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \varrho \frac{\bar{u}^2}{2} \cdot \mu^{(1-n)} \cdot \varrho^{(n-1)} \cdot a^{(n-1)} \cdot \bar{u}^{(n-1)} \tag{29}$$

oder mit $(n-1) = \alpha$:

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \varrho \frac{\bar{u}^2}{a} \cdot R^\alpha. \tag{30}$$

Lassen wir jetzt nachträglich die gemachte Voraussetzung eines einfachen Potenzgesetzes fallen, so wird

$$\frac{\Delta p}{l} = \varrho \frac{\bar{u}^2}{a} \cdot f(R), \tag{31}$$

identisch mit dem oben aus der Differentialgleichung abgeleiteten Gesetz.

Eine andere „dimensionslose" Form des Gesetzes erhält man, wenn man vorübergehend $m = 1$ setzt.

Dann ergibt sich entsprechend:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\mu \bar{u}}{a^2} \cdot F(R). \tag{32}$$

$m = 1$ gibt $n = 0$, d. h. Unabhängigkeit des Widerstandes von der Dichte oder völliges Zurücktreten des Trägheitswiderstandes gegen den Zähigkeitseinfluß und

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \frac{\mu \cdot \bar{u}}{a^2}, \tag{33}$$

d. h. bis auf den unbestimmt bleibenden Faktor C das Poiseuillesche Gesetz.

Umgekehrt gibt $n = 1$ $m = 0$, d. h. alleiniges Einwirken der Trägheit und

$$\frac{\Delta p}{l} = C \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{a} \qquad (34)$$

oder die Form des Widerstandsgesetzes, die sehr großen Geschwindigkeiten entspricht.

Der außerordentliche Vorzug des Gesetzes (25) mit dem dimensionslosen Beiwert $\lambda = f(R)$ ist die völlige Unabhängigkeit desselben von dem benutzten Maßsystem und die Beherrschung des experimentellen Befundes (mit beliebiger Veränderung von Abmessungen, Geschwindigkeiten, Flüssigkeiten) durch eine einzige Kurve für

$$\lambda = \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{2a}{\varrho \bar{u}^2} \text{ als } F(R). \qquad (25')$$

Diese Darstellungsweise ist infolgedessen heute durchweg üblich. Zum leichten Erkennen einfacher Potenzbeziehungen wird außerdem meistens die Darstellung von $\lg \lambda$ als $F(\lg R)$ gewählt, bzw. λ- und R-Werte auf logarithmischem Koordinatenpapier aufgetragen.

Durch Einführung von λ erhält das Poiseuillesche Gesetz eine besonders einfache Form. Man erhält:

$$\lambda_{\text{Pois.}} = \frac{8 \mu \bar{u} l}{a^2 \cdot l} \cdot \frac{2a}{\varrho \bar{u}^2} = \frac{16 \cdot \mu}{a \bar{u} \cdot \varrho} = \frac{16}{R} \qquad (35)$$

oder in logarithmischer Darstellung eine unter 45° verlaufende Gerade (vgl. Fig. 4).

Die Aufstellung des Widerstandsgesetzes für Flüssigkeiten in der hier betrachteten Form scheint zuerst von Rayleigh (17) geschehen zu sein; etwas anders findet es sich schon bei Reynolds. Besonders für die Röhrenströmung ist es neuerdings ausführlich behandelt worden von Blasius (18).

6. Das laminare Widerstandsgesetz in der Anlaufstrecke und seine Bedeutung für die Bestimmung der kritischen Zahl.

Wenn eine Flüssigkeit durch eine Röhre unter einem bestimmten Druck ausfließt, der durch Höhe und spezifisches Gewicht der Flüssigkeit im Vorratstrog gegeben ist, so wird neben der Reibungsarbeit in der Röhre auch noch ein Betrag an Arbeit geleistet, der der kinetischen Energie der ausfließenden Flüssigkeit entspricht. Nur wenn dieser Betrag klein gegen den ersten ist, gilt mit genügender Annäherung das Poiseuillesche Gesetz, sofern man es nämlich auf den gesamten Druckabfall vom Trog bis zur Ausflußstelle bezieht. Bezieht man den Druckabfall auf zwei Meßstellen, die genügend weit vom Einlauf entfernt sind, so gilt das Gesetz völlig genau.

Je länger und enger das Rohr und je kleiner die Geschwindigkeit, desto mehr tritt der Beschleunigungsanteil des Druckabfalls gegenüber dem Reibungsanteil zurück und desto besser gilt für den genannten Druckabfall vom Trog bis zum Röhrenende das Poiseuillesche Gesetz. Entsprechende Beobachtungen hat schon Poiseuille selbst gemacht, indem er feststellte, daß unterhalb einer gewissen, vom Durchmesser abhängigen Länge sein Gesetz die Gültigkeit verlor. Den richtigen Grund hierfür erkannte jedoch erst Hagenbach (19), der auch die für die Beschleunigung entfallende „Korrektur der lebendigen Kraft" bereits richtig angab. Mit ihr lautet das vollständige Gesetz:

$$\Delta p = 8 \frac{\mu \bar{u} l}{a^2} + 2 \frac{\varrho \bar{u}^2}{2}. \qquad (36)$$

Dieser Korrektur liegt zugrunde die oben durch Gleichung (13) angegebene parabolische Geschwindigkeitsverteilung. Diese ist jedoch keineswegs sofort beim Eintritt in das Rohr vorhanden. Vielmehr herrscht dort — bei geeigneter Abrundung des Einlaufstückes zur Vermeidung von Kontraktion, bei sehr kleinen R-Werten auch ohne Anwendung dieser Vorsichtsmaßregel — annähernd konstante Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt (vgl. hierzu Schiller, diese Zeitschr. **26**, 65, 1925, Fig. 1). Dann beginnt nach Prandtls Grenzschichttheorie die Reibung von der Wand her eine verzögernde Wirkung auf die wandnahen Schichten auszuüben und diese Wirkung allmählich weiter und weiter nach der Mitte zu auszudehnen. Gleichzeitig wirkt aber auch das Druckgefälle beschleunigend auf den der Wandreibung weniger unterliegenden Kern, so daß dort die Geschwindigkeit allmählich anwächst. Unter dem Zusammenwirken beider Einflüsse bildet sich schließlich das parabolische Profil der Poiseuilleschen Strömung. Dieser Endzustand wird streng erst asymptotisch im Unendlichen erreicht werden. Eine angenäherte Theorie des Vorgangs im Sinne der Prandtlschen Auffassung wurde unter bestimmten Voraussetzungen über das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht von Schiller (20) durchgeführt. Nach ihr wird die parabolische Verteilung erreicht, wenn der Quotient aus relativer Anauflänge $\frac{x}{a}$ (x = Abstand vom Einlauf) und Reynoldsscher Zahl R den Wert 0,115 angenommen hat: $\frac{x}{aR} = 0{,}115$. D. h. mit zunehmender Geschwindigkeit bzw. Reynoldsscher Zahl schiebt sich die Stelle der völligen Ausbildung des parabolischen Profils immer weiter hinaus.

Gleichzeitig gestattet die Theorie auch die Berechnung des Druckabfalls für jeden beliebigen Teil der Anlaufstrecke. Der Druckabfall muß ja mit dem Geschwindigkeitsprofil zusammenhängen und sich mit ihm ändern. Wie erheblich die hierdurch bedingten Änderungen des Widerstandes sind, zeigt Fig. 5 an dem Beispiel eines Rohres von 24 mm l. W. Die Meß-

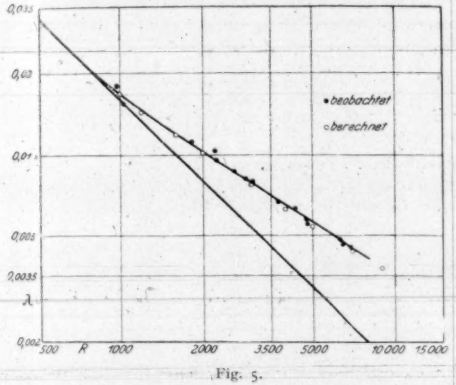


Fig. 5.

strecke lag bei 1 bis 2 m vom Einlauf. Die unter 45^0 fallende Gerade stellt, wie oben erwähnt, das Poiseuillesche Gesetz dar. Die berechneten und gemessenen Widerstände liegen beträchtlich höher.

Es leuchtet ein, daß die Unkenntnis, bzw. Nichtberücksichtigung dieses Umstandes zu unrichtigen Bestimmungen der kritischen Zahl Anlaß geben kann, sofern man nämlich mit zu kurzen Anlaufstrecken bzw. Rohren arbeitet und den Beginn der Turbulenz identifiziert mit der beginnenden Abweichung vom Poiseuilleschen Gesetz, sei es nach Geschwindigkeitsverteilung oder Druckabfall. Hierunter leiden z. B. die Verteilungsmessungen von Morrow (14) und besonders von Fry und Tyndall (15).

Besonders verwirrend haben hier die zahlreichen Arbeiten von Sorkau (11), auch Ugarte (12) gewirkt. Sie arbeiteten mit verhältnismäßig kurzen Glaskapillaren und führten mit Wasser und vielen organischen Flüssigkeiten sorgfältige Messungen aus. Wegen der kurzen Rohrlänge bekamen sie schon bei verhältnismäßig niedrigen R-Werten merkliche Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz und wurden auf diese Weise zur Annahme sehr niedriger kritischer Zahlen geführt (z. B. Sorkau in einem Fall $R_{krit} = 224$). Außerdem machte sich das wirkliche Einsetzen der Turbulenz weiterhin durch starke Änderung im Widerstand geltend; das wurde dann als Beginn eines neuen, zweiten Turbulenzstadiums gedeutet. Durch Schiller und Kirsten (21) wurde jedoch auf Grund obiger Theorie quantitativ die Identität des „1. Turbulenzstadiums" mit der laminaren Anlaufströmung nachgewiesen.

An dieser Stelle sei noch auf eine auffallende Erscheinung hingewiesen, daß nämlich u. U. das Einsetzen der Turbulenz sich durch erhebliche Verminderung des Druckabfalles geltend machen kann. Anzeichen hierfür hat Schiller in den Sorkauschen Arbeiten festgestellt und später selbst weiter noch messend verfolgt (22), wobei Druckabfälle nicht nur kleiner als der Anlaufströmung entsprechend, sondern sogar kleiner als der Poiseuillesche Abfall gefunden wurden. Die Erklärung hierfür ist folgende: Durch das erstmalige Auftreten von wenigen schwächeren Wirbeln wird die hohe Geschwindigkeit der Kernströmung herabgesetzt, da die Wirbel nivellierend wirken. Das liefert aber einen Druckanstieg, so daß der gesamte gemessene Druckabfall, der im Gleichgewicht steht mit Reibung an der Wand und Impulsänderung, u. U. erheblich verringert wird. Beim weiteren Anwachsen der Wirbel stromab tritt dann die bekannte Widerstandserhöhung des turbulenten Zustands ein.

7. Einfluß von Anfangsstörung und Anlauflänge auf die kritische Zahl.

Die Reynoldssche Ähnlichkeitsbetrachtung über die kritische Zahl ist in zweifacher Beziehung stark idealisierend. Erstens tritt in der Reynoldsschen Zahl nur ein charakteristischer Längenparameter auf, der Rohrhalbmesser. D. h. die Betrachtung gilt streng nur für eine Meßstelle, die unendlich weit vom Einlauf entfernt ist, was natürlich nie erfüllt ist. Zweitens enthält die kritische Zahl keinerlei Angaben über die Störungen, denen die Flüssigkeit vor oder bei ihrem Eintritt in das Rohr unterworfen ist, die „Anfangsstörungen". In bezug auf diesen letzten Punkt hilft sich Reynolds durch Betrachtung zweier Grenzfälle, wie wir oben gesehen. Er betrachtet einmal Flüssigkeit mit möglichst kleiner, zum andern mit möglichst großer Anfangsstörung. Dementsprechend erhält er zwei kritische Zahlen, eine obere und eine untere. Diese Trennung hat sich, besonders in der englischen Literatur, bis auf die neuere Zeit (z. B. die wichtige Arbeit von Stanton und Pannell) aufrecht erhalten. Trotzdem wurde man sich allmählich darüber klar, daß sowohl die obere durch weitergehende Vorsicht noch wesentlich gesteigert werden konnte (Barnes

und Coker, Ekman), als auch bei nicht ganz starken Anfangsstörungen teilweise höhere Werte für die untere kritische Zahl auftraten (z. B. bei Ruckes).

Wenn sonach auch immer noch eine gewisse Lücke zwischen den beiden Gebieten vorhanden war, so lag es doch nahe, sich auf den Standpunkt zu stellen, daß eben die kritische Zahl schlechthin eine stetige Funktion der Anfangsstörung sei. Solche Gedanken finden sich schon früher gelegentlich, besonders in der theoretischen Literatur. Systematisch messend verfolgt wurde die Frage neuerdings durch Schiller (20). In der Nähe des Einlaufs wurde im Trog eine Platte senkrecht zur Rohrachse angebracht, die dem — gut abgerundeten — Einlauf beliebig genähert werden konnte. War die Platte weit entfernt, so war durch den geeignet geformten Einlauf und bei gut beruhigtem Vorratswasser für störungsfreien Einlauf gesorgt. Bei allmählicher Annäherung der Platte wurde diese immer mehr und mehr in das Gebiet der Zuströmung gebracht und durch die entsprechend steigende Geschwindigkeit der Strömung am Ort der Platte wurden an ihr immer stärker werdende Wirbel erzeugt, die mit der Strömung ins Rohr geführt wurden.

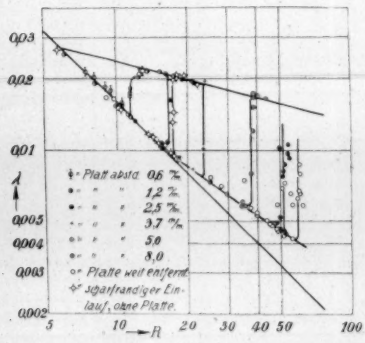


Fig. 6.

Dementsprechend ergaben sich, wie Fig. 6 zeigt, kritische Zahlen, etwa vom Betrag der Reynolds'schen oberen Zahl stufenweise abnehmend bis zur Zahl 1160. Noch weitere Annäherung der Platte senkte die kritische Zahl nicht mehr weiter. Ebenso wurde auch durch Abschirmung eines Segmentes von fast der halben Öffnung durch ein aufgesetztes Blechstück keine tiefere kritische Zahl erhalten. Dieser Wert scheint auch nach weiteren Messungen von Schiller und Kirsten (22), (23) ziemlich genau die untere Grenze anzugeben. Jedenfalls dürfte sie nicht unter 1100 liegen.

Für die einwandfreie Festlegung dieses Wertes ist es wesentlich, daß die Meßstrecke genügend weit vom Einlauf entfernt ist (mindestens 100 Halbmesser). Andernfalls können beim Einlauf unterhalb der kritischen Zahl entstehende oder mitgebrachte Wirbel bis zur Meßstrecke u. U. noch nicht völlig abgeklungen sein

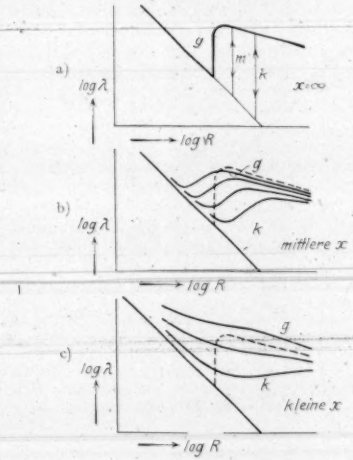


Fig. 7.

g = große, m = mittlere, k = kleine Störungen.

und widerstanderhöhend wirken, während man weiter stromab den genauen Laminarwiderstand erhielte. Wie sich für verschiedene Anlauflängen und verschieden große Anfangsstörungen von diesem Gesichtspunkt aus das Bild verschieben muß, zeigt Fig. 7 in schematischer Darstellung. Außerdem ist natürlich stets noch der laminare Anlaufwiderstand zu berücksichtigen.

Weiterhin erhebt sich die Frage nach der Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Anlauflänge, abgesehen von den erwähnten scheinbaren dadurch bedingten Änderungen. Sofern man nicht mit sehr langen Rohren arbeitet, wird man prinzipiell mit einer möglichen Abhängigkeit des R_K von der Dimensionslosen $\frac{x}{a}$ rechnen müssen. Eine dahingehende experimentelle Andeutung findet sich schon bei Reynolds selbst, der angibt, daß die Stelle der Auflösung seines Farbfadens mit zunehmender Geschwindigkeit etwas gegen den Einlauf hin-

rückte, zwar nie näher als bis zu einer Länge von 30 Durchmessern. Auch Blasius (18) erhielt bei sehr kurzer Anlauflänge (25 Durchmesser) eine höhere kritische Zahl (etwa 3000), die er allerdings in Beziehung zu Reynolds' oberer kritischer Zahl setzte, was seiner eigenen Versuchsanordnung nicht entsprach. Andererseits erhielten Barnes und Coker genau die gleiche kritische Zahl am Ende eines 3,6 m langen Rohres und ebenso, als sie es zum Zweck der Prüfung eines Einflusses der Länge halbiert hatten. Und ebenso wendet sich Ekman auf Grund seiner Beobachtungen ausdrücklich gegen die Möglichkeit einer Abhängigkeit von der Länge. Denn er konnte kein Vorrücken der Turbulenzzone gegen den Einlauf hin bei steigender Geschwindigkeit bemerken, ebensowenig wie einen Einfluß des Durchmessers bei gleicher Röhrenlänge, d. h. bei einer Änderung der relativen Anlauflänge im Verhältnis von etwa 3 : 5. Ähnliches gilt übrigens auch für die Reynoldsschen Messungen.

Zum Entscheid über diese Fragen wurden von Schiller und Kirsten (22), (23) ausgedehnte Versuche mit zwei Rohren von 0,3 und 0,6 cm Halbmesser für $\frac{x}{a} = 34$ bis $\frac{x}{a} = 2635$ angestellt. Zur Feststellung der kritischen Zahl an den verschiedenen Meßstellen dienten Messungen des Druckabfalles. Um auch auf hohe kritische Zahlen zu kommen, wurde mit abgerundetem Einlaufstück und teilweise mit weitgehend beruhigtem Vorratswasser gearbeitet. Die Ergebnisse sind zum Teil in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle V.

	$\frac{x}{a}$	R_{Kr}
Reihe I. $a = 3$ mm beruhigtes Wasser	178	5300 bis 10000
	227.5	4100 „ 5900
	348	4500 „ 5100
	398	4700 „ 5100
	830	1100 „ 1300
	1937	1300
	2635	1240
Reihe IV. $a = 6$ mm dauernder Zufluß im Trog	34.1	5400
	67.6	4050
	101.2	2800 bis 3300
	581.5	1600 „ 2100
	1128	1700 „ 1800

Damit dürfte der einwandfreie Beweis erbracht sein, daß bei gegebener Anfangsstörung die kritische Zahl mit zunehmender Anlauflänge systematisch abnimmt. Noch nicht ist allerdings wohl der Beweis erbracht, ob auch bei sehr kleinen Anfangsstörungen stets die untere kritische Zahl 1160 erreicht wird, sofern man sich nur genügend weit vom Einlauf entfernt, ob also in Fig. 7a an Stelle der drei gezeichneten Übergänge nur der niedrigste stehen bleiben müßte. Reihe IV steht dem vielleicht entgegen und läßt für Reihe I vermuten, daß zwischen $\frac{x}{a} = 400$ und 800 vielleicht eine Störungsstelle (leichte Verbiegung oder dergl.) lag.

Die verhältnismäßig große Streuung der Beobachtungswerte ist natürlich bedingt durch den unkontrollierbaren variablen Grad der Anfangsstörung und gibt die Erklärung dafür, daß frühere Beobachter mit spärlicherem Versuchsmaterial zu keiner eindeutigen Einsicht kommen konnten.

Für die dem Einlauf benachbarten Teile des Rohres besteht eine nahe Verwandtschaft mit den Verhältnissen bei einer parallel ihrer Erstreckung angeströmten Platte. Für diese gilt als kritische Zahl $\frac{u \cdot \delta}{\nu}$, d. h. an Stelle des Rohrhalbmessers tritt als charakteristische Länge die Dicke der Prandtlschen Grenzschicht δ, und zwar ergibt sich nach Messungen von van der Hegge Zijnen (24) $\left(\frac{u \cdot \delta}{\nu}\right)_{Kr} \sim 3000$. Mit Hilfe der oben erwähnten Theorie der laminaren Anlaufströmung kann man nun auch beim Rohr die Grenzschichtdicken berechnen und auf Grund des Versuchsmaterials von Schiller und Kirsten die modifizierten kritischen Zahlen $\left(\frac{u \cdot \delta}{\nu}\right)_{Kr}$ für die verschiedenen Anlauflängen aufstellen. Mit abnehmender Anlauflänge muß wegen der abnehmenden Grenzschichtdicke dabei der Einfluß des endlichen Rohrhalbmessers mehr und mehr zurücktreten und man also für sehr kleine Anlauflängen den Anschluß dieser kritischen Zahl im Rohr an den Wert der Platte erhalten. Dies konnte Schiller insofern bestätigen, als er auf die genannte Art für $\frac{x}{a} = 0$

$$\left(\frac{u \cdot \delta}{\nu}\right)_{Kr} = 2000 \text{ bis } 4000$$

extrapolieren konnte, in guter Übereinstimmung mit dem von van der Hegge für die Platte gefundenen Wert 3000.

Es liegt nahe, die Entstehung der Turbulenz in Beziehung zu setzen zur Wirbelbildung an umströmten Körpern. Dort ist nämlich Wirbelbildung stets geknüpft an Ablösungserscheinungen und diese wieder an die verzögerte Strömung auf der Rückseite des Körpers (Prandtl). Eine Ablösung kann nun auch an der Rohrwand erfolgen, wenn ein etwa vom Einlauf her-

stammender Wirbel mit entsprechendem Rotationssinn die an und für sich schon verzögerte Strömung in der Grenzschicht weiter verzögert.

Dementsprechend muß auch eine Verzögerung oder Beschleunigung der Strömung im Ganzen schon bei schwach konischen Röhren sich in einer Erniedrigung bzw. Erhöhung der kritischen Zahl geltend machen. Solche Beobachtungen liegen vor von Ekman (6) bei einem Rohr von 142 cm Länge und einem inneren Durchmesser von 2,53 cm am einen und 2,64 cm am anderen Ende. Die bei verzögerter Strömung gemessenen kritischen Zahlen waren: 21500, 22000, 21000, 19500, d. h. im Mittel 21000; bei beschleunigter Strömung: 24500, 12500, 21500, 19000, 25500, 25500, d. h. im Mittel 24100.

Mit stärkeren Konvergenzwinkeln arbeitete Gibson (25). Er fand bei 15^0 und konvergierender Strömung eine Erhöhung der kritischen Geschwindigkeit auf das 40fache.

Eine Krümmung des Rohres wird leicht zu Ablösungserscheinungen an der konvexen Innenseite Anlaß geben und dadurch das Auftreten von Wirbeln begünstigen. Über einschlägige Versuche s. bei Grindley und Gibson (57) und bei Lechner (26).

8. Wandrauhigkeit und kritische Zahl.

Ebensowenig wie in der Reynoldsschen Zahl eine Angabe über Anlauflänge oder Anfangsstörung enthalten ist, enthält sie eine solche über die Wandbeschaffenheit. Vielmehr macht ihre Ableitung ausdrücklich die Voraussetzung, daß die geometrische Form durch einen Längenparameter bestimmt sein soll. Während man sich hinsichtlich der Anlauflänge dadurch helfen kann, daß man die Meßstelle sehr weit vom Einlauf legt, ist man betreffs der Wandrauhigkeit in schwierigerer Lage. Jedenfalls ist es auf Grund der Reynoldsschen Ableitung von vornherein nicht gesagt, daß die Wandrauhigkeit die kritische Zahl nicht wesentlich beeinflussen kann. Auf Grund der Ergebnisse des letzten Abschnitts über den Einfluß der Anfangsstörung wird man jedoch erwarten können, daß jedenfalls solange diese bestimmend für den Wert der kritischen Zahl sein wird, als sie größer ist als die durch Wandrauhigkeit bedingten Störungen. Die größte überhaupt vorhandene Störung legt die kritische Zahl fest. Da es ferner durch Hervorrufen allergrößter Störungen am Einlauf sich bei glatten Rohren als unmöglich erwies, mit der kritischen Zahl unter 1160 herunter zu gelangen, so erscheint dies auch bei verhältnismäßig starken Wandrauhigkeiten unwahrscheinlich.

Bis vor nicht allzu langer Zeit war man hierüber jedoch anderer Ansicht, wie an Hand der Literatur zu sehen ist. Maßgebend hierfür scheinen vor allem Versuche von Ruckes (7) an Metallkapillaren gewesen zu sein, von denen eine Versuchsreihe in Fig. 8 (in die neuere Darstellungsform umgerechnet) wiedergegeben ist.

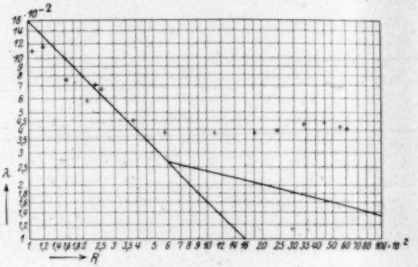


Fig. 8.

Es handelt sich dabei um eine Eisenkapillare von 0,4 mm l. W., deren relative Rauhigkeit (Rauhigkeitshöhe: Durchmesser) natürlich wegen des engen Durchmessers verhältnismäßig groß sein kann. Aus dem Abweichen der Widerstandskurve vom Poiseuilleschen Gesetz schloß Ruckes auf ein R_K von $\sim$ 200 bis 250 (nach unserer Darstellung etwa 400).

Nun stellte aber Schiller (27) neuerdings Versuche mit einem Messingrohr von 1,6 cm l. W. an, dem dadurch eine kräftige Rauhigkeit erteilt wurde, daß in seine Wand ein Gewinde von 0,3 mm Tiefe eingeschnitten wurde. Bei scharfrandigem Einlauf erhielt er als scharf ausgeprägte kritische Zahl 1400, d. h. genau denselben Wert, wie vorher beim glatten Rohr. Dann wurde noch eine Abrundung am Einlauf angebracht und in diesem Fall wurde bis $R = 10000$ (Grenze der Versuchsmöglichkeit) noch Laminarströmung erhalten. Die Rauhigkeit war also in beiden Fällen augenscheinlich gänzlich ohne Einfluß auf die kritische Zahl.

Bei späteren, zu anderem Zweck unternommenen ähnlichen Versuchen Schillers (28) mit verschiedenen Röhrenweiten und verschiedenen Gewinden ergab sich teilweise dasselbe Bild, teilweise eines ähnlich dem bei Ruckes. Besonders schön sieht man beide Bilder nebeneinander an Messungen, die Fromm (29) auf Anregung von Hopf an einer Rinne mit einem Wandbelag von Drahtnetz ausgeführt hat und die in Fig. 9 wiedergegeben sind. Hier, wie auch schon bei Schillers Messungen (28) mag es zunächst wundernehmen, daß gerade beim kleinsten Durchmesser, d. h. der größten rela-

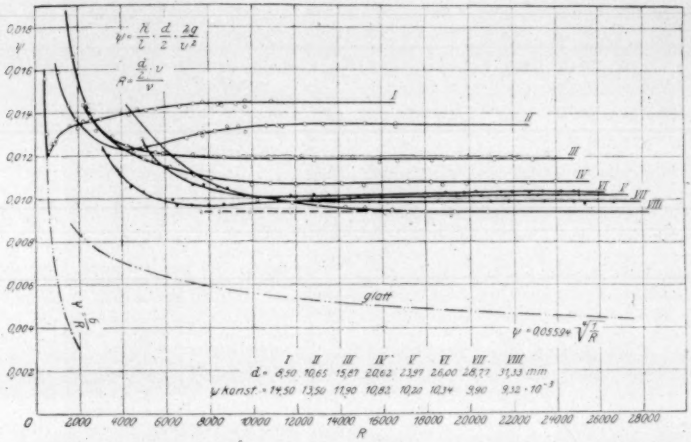


Fig. 9.

tiven Rauhigkeit, bei den niedrigen R-Werten bis zu $R_K = 1250$[1]) noch reine Laminarströmung herrscht, während die Rohre mit kleinerer relativer Rauhigkeit dort schon auf erhöhten Widerstand hinweisen. Das gibt aber, wie mir scheint, gerade den Schlüssel zur Erklärung. Da alle Meßstrecken die gleiche absolute Anlauflänge hatten, so ist die relative Anlauflänge für das Rohr mit der größten relativen Rauhigkeit am größten. Hier haben die Einlaufwirbel also verhältnismäßig länger Gelegenheit abzuklingen, bevor sie zur Meßstrecke kommen. Die Bilder der relativ kürzeren Rohre decken sich auch weitgehend mit der untersten Kurve in unserer Fig. 7c, die schon früher aus solchen Überlegungen heraus entworfen war. Dabei mag noch mitsprechen, daß das Vorhandensein von Wandrauhigkeiten das Abklingen von Einlaufstörungen erschwert. Auch die Ergebnisse von Ruckes und Wildhagen werden wohl in diesem Sinne zu erklären sein.

In diesem Zusammenhang seien noch Versuche von Schaefer und Heisen (30) erwähnt, die, ausgehend von Betrachtungen über die molekulare Wandrauhigkeit als Ursache der Turbulenz, untersuchten, ob grobe Inhomogenitäten innerhalb der Flüssigkeit (z. B. Bernsteinstückchen in Kochsalzlösung) die kritische Zahl beeinflussen. Bei ihrer Versuchsanordnung (ähnlich der von Sorkau) hatten sie bei $R = 4000$ noch keine Turbulenz, was gegen einen Einfluß spricht.

1) Wenn man für a den hydraulischen Radius setzt (s. darüber unter 9.). Fromm setzt in R als Längenmaß den halben hydraulischen Radius. Seine R-Werte sind also zum Vergleich mit unseren mit 2 zu multiplizieren.

9. Kritische Zahl bei anderen Berandungen.

Für Röhren mit vom Kreis abweichender Berandung (Dreieck usw.) ist die Reynoldssche Betrachtung insoweit unverändert gültig, als sie aussagt, daß für jeweils ähnliche Berandung, z. B. für alle quadratisch begrenzten Rohre eine kritische Zahl existieren soll, die jedoch von der für Kreiszylinderrohre abweichen kann. Für eine Nachprüfung in diesem Sinne liegt, wenigstens für allseitig geschlossene Rohre, kein experimentelles Material vor. Wohl aber sind kritische Zahlen für verschiedene Berandungsformen bestimmt worden.

Hierbei hat sich der aus der Hydraulik stammende Begriff des „hydraulischen Radius" zweckmäßig erwiesen. Man versteht darunter den Quotienten $a = \frac{2F}{U}$, worin F den Rohrquerschnitt und U den Umfang bedeutet. Beim Kreiszylinder wird er identisch mit dem Halbmesser. Führt man ihn als Längenparameter in die Reynoldssche Zahl ein, so zeigen die Versuchsergebnisse für ganz verschiedene Berandungen kritische Zahlen, die weitgehend mit denen für Kreisrohre übereinstimmen, was wegen der verschiedenen geometrischen Gestalt aus der Reynoldsschen Betrachtung nicht zu erschließen ist.

An einem quadratischen und einem rechteckigen Rohr (Seitenverhältnis 1:4) wurden Versuche von Schiller (28) ausgeführt. Ersteres lieferte als kritische Zahl etwa 1100, letzteres neben teilweise früherem Abweichen von der Laminarströmung (durch Einlaufstörungen?) Werte bis 1300.

Becker (31) ließ Wasser und Luft durch längeren ringförmigen Spalt zwischen zwei koaxialen Zylindern strömen und erhielt (mangels einer Beruhigungsstrecke ziemlich verwaschenen) Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung bei etwa $R = 1350$. Für den gleichen Fall ist aus Wassermessungen von Winkel (32) zu entnehmen: $R_K \cong 1250$. Schließlich stellte noch Lonsdale (33) Versuche mit acht verschiedenen Spaltweiten an. Hieraus sind zu entnehmen kritische Zahlen zwischen 1940 und 2800. Lonsdale selbst findet etwas bessere Konstanz der kritischen Zahl, wenn er statt des hydraulischen Radius $a_1 - a_2$ in die Reynoldssche Zahl einführt $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1}$. Die Verbesserung ist jedoch nicht sehr bedeutend.

Im offenen Gerinne wurden Bestimmungen der kritischen Zahl durch Hopf (34) ausgeführt. Ihre Bedeutung leidet nach Hopf hier darunter, daß durch die freie Oberfläche eine neue, in der Stokes-Navierschen Differentialgleichung der Hydrodynamik nicht vorhandene physikalische Größe hinzukommt, die Oberflächenspannung T. Das bedeutet, daß neben der Reynoldsschen Zahl R eine zweite Dimensionslose S den Vorgang bestimmt:

$$S = \frac{\mu u}{T}. \qquad (37)$$

Solange Hopf nur mit einer Flüssigkeit, Wasser, arbeitete; erhielt er bei Variation des Gefälles von $^1/_{125}$ bis $^3/_{50}$ gute Konstanz der kritischen Zahl. Führt man als hydraulischen Radius wieder $\frac{2F}{U}$ ein mit $U =$ benetzter Wandumfang, so erhält man R_K zwischen 600 und 660. Auf eine numerische Übereinstimmung mit dem Wert für Röhrenströmung kann natürlich nicht gerechnet werden. Für Zuckerlösung hingegen ergab sich 500 bis 540. Interessant ist noch die Feststellung, daß (bei Wasser) sich für Glas und aufgerauhtes Messing auch hier beim Gerinn genau die gleiche kritische Zahl ergab, in Übereinstimmung mit den oben genannten späteren Versuchen von Schiller und von Fromm.

In einem freien Strahl tritt keine turbulente Strömung auf, da hier keine Wände vorhanden sind, von denen Störungen ausgehen oder an denen Ablösungserscheinungen sich ausbilden können. Beobachtungen hierzu liegen vor von Barnes und Coker (5), die bei Ausströmen aus einer 5 cm weiten Öffnung bis zu 10 m/sec glasklare feststehende Strahlen erhielten. Das entspricht einer Reynoldsschen Zahl etwa gleich 250000! Dagegen beweist auch die geriefelte Oberfläche nichts, die ein aus einem Rohr ausströmender Strahl nach Überschreitung der kritischen Zahl zeigt (Hopf (34), Couette (35)), ebensowenig wie die Zuckungen des Strahls, die um die kritische Zahl herum besonders stark sind. Sie sind nichts anderes als eine Folge der starken Geschwindigkeitsschwankungen, die mit dem dort vorhandenen Wechsel zwischen laminarer und turbulenter Strömung im Rohr verbunden sind (hierüber siehe bei Schiller (20a) S. 13 und (20b) S. 441). Auch bei voll ausgebildeter Turbulenz treten dauernd kleine Geschwindigkeitsschwankungen auf, die zu kleinen Strahlzuckungen und Störungen der Oberfläche am Ausfluß Anlaß geben können, die sich ebenso wie kleine Rauhigkeiten an der Ausflußöffnung in Oberflächenwellen äußern. Außerdem kann der aus einem Rohr austretende Strahl Wirbel der Rohrströmung mitbringen, die u. U. erst nach einer gewissen Zeit abklingen.

Da weder die Oberflächenwellen ein Beweis für Turbulenz, noch das glasklare Aussehen ein wirklicher Beweis gegen Turbulenz ist, habe ich kürzlich ein kleines experimentum crucis angestellt, indem ich — nach Reynolds' Vorbild im Rohr — einem Strahl, der aus 0,6 cm weiter Öffnung eines 1,5 m hohen Troges ausströmte, einen Faden gefärbter Flüssigkeit einfügte. Das entspricht einer Reynoldsschen Zahl bis zu 13500. Der Faden wurde im Strahl nicht nur sehr schön aufrecht erhalten, ohne das kleinste Anzeichen einer Wirbelung, sondern auch nach ganz kräftigem Schütteln des Troges blieb die Laminarströmung bestehen. Ein Zeichen dafür, daß mitkommende Wirbel ganz schnell verschwinden müssen, wenn keine feste Wand vorhanden ist. Auch Strahlzuckungen waren bis zu den kleinsten Geschwindigkeiten nicht zu beobachten. Nur die vom Ausfluß herrührenden Oberflächenstörungen wurden natürlich bei kleinen Geschwindigkeiten schwächer.

10. Versuche mit rotierenden Flüssigkeiten.

Versuche, die für die mathematische Behandlung des Turbulenzproblems von besonderer Bedeutung geworden sind, beziehen sich auf den Fall einer Flüssigkeit in dem Ringspalt zwischen zwei koaxialen Zylindern, von denen der innere feststeht, der äußere rotiert.

Die erste unter diesen Arbeiten, die auf die

„kritische Zahl" Bezug nimmt, stammt von Mallock (36). Der äußere rotierende Zylinder besaß einen Halbmesser von 5,017 cm, der innere feststehende einen solchen von 4,636 cm; die Eintauchtiefe des inneren betrug 11,07 cm, die Spaltbreite 0,381 cm. Der innere Zylinder stand in Verbindung mit einer Torsionswage, an der das Drehmoment der Reibung abgelesen werden konnte. Die Versuche wurden ausgeführt mit Wasser von 4, 13,8 und 48° C. In dieser ersten Arbeit fand Mallock keinerlei Anzeichen für ein Auftreten von Turbulenz bis zur höchsten erreichten Reynoldsschen Zahl von 2480 (als Längenabmessung gilt hierbei die Spaltbreite). In einer späteren Arbeit (1896) (37), die mir leider im Original nicht vorlag, fand Mallock eine obere kritische Zahl für sichere Turbulenz von 1000 (oder 2000?) nach Überschreitung eines Zwischengebietes und einer unteren Grenze, bis zu der die Bewegung sicher stabil war. Wenn dagegen der äußere Zylinder ruhte und der innere rotierte, so wurde angeblich für alle Geschwindigkeiten Turbulenz gefunden.

Zwischen diese beiden Mallockschen Arbeiten fällt eine solche von Couette (35), in der wieder der innere Zylinder ruhte, der äußere rotierte. Die Maße waren: Innerer Halbmesser des äußeren Zylinders 14,64 cm; Halbmesser des inneren Zylinders 14,39 cm; Spaltbreite 0,25 cm; Höhe 7,9 cm. Mit dieser Versuchsanordnung erhielt Couette sowohl für Wasser, als für Luft eine scharfe Grenze, von der ab sich der Wechsel zwischen Turbulenz und laminarer Strömung durch starke Schwankungen an Wage und Flüssigkeitsspiegel geltend machte, bei

$$R_{K,\,\text{Wasser}} = 927 \quad \text{bzw.} \quad R_{K,\,\text{Luft}} = 907.$$

Nach Überschreitung dieses Gebietes mit den starken Schwankungen stellte sich dann völlige Turbulenz ein.

Mit außerordentlich verbesserten und verfeinerten Mitteln wurde das Problem neuerdings durch G. J. Taylor (38) einer sorgfältigen Untersuchung unterzogen, die in wesentlichen Punkten auch veränderte Ergebnisse zeitigte. Die hauptsächlichen Veränderungen bzw. Verbesserungen gegenüber den bisher behandelten Versuchen waren folgende: Zunächst wurde der Einfluß von Störungen, die vom Boden aus in die Flüssigkeit gelangen können, dadurch herabgesetzt, daß die Höhe der Zylinder im Verhältnis zum Durchmesser wesentlich gesteigert wurde: 90 cm Höhe bei 4,035 cm Radius des äußeren Zylinders; Spaltbreite unter 1 cm. Auf die Wichtigkeit, den Eintritt von Störungen vom Boden her zu erschweren, etwa durch eine enge Stelle am unteren Rande des Versuchsspaltes, hatte schon vorher Prandtl hingewiesen (diese Zeitschr. 23, 24/25, 1922). Ferner wurden äußerer und innerer Zylinder, die beide drehbar waren, so am Steinboden und den Wänden gelagert, daß das Auftreten von Verschiebungen eines Zylinders gegen den andern weitgehend vermieden war. Auf die Messung des Drehmomentes, die die Quelle von Störungen bilden kann, wurde verzichtet; statt dessen wurde nach Reynoldsschem Muster durch gefärbte Flüssigkeit ein Einblick in die Strömung gewonnen, insbesondere das Auftreten der Instabilität sichtbar gemacht. Dies brachte dadurch eine erhebliche technische Schwierigkeit mit sich, daß der mittlere Teil des äußeren Zylinders aus Glas hergestellt werden mußte. Jedoch gelang es, einen solchen Glaszylinder zu erhalten, dessen Bohrung nicht mehr als um $^1/_{10}$ mm variierte.

Durch die beschriebenen Vorsichtsmaßregeln war weitgehend dafür gesorgt, daß keine unerwünschten Störungen auftreten konnten. Infolgedessen ergab sich auch eine geradezu erstaunliche Übereinstimmung zwischen den experimentellen Ergebnissen und einer Theorie, die Taylor unter der Annahme kleiner rein axialsymmetrischer Störungen entwickelt hat. Dabei erstreckt sich diese Übereinstimmung nicht nur auf die Stabilitätsgrenze, sondern auch auf die Abmessungen der nach Eintritt des Umschlags auftretenden Wirbel. Die Versuche dehnten sich aus über einen großen Bereich von Drehungsgeschwindigkeiten, wobei die Zylinder sowohl gleichläufig als auch gegenläufig rotierten. Das berechnete Strömungsbild für den Fall gleichläufiger Rotation zeigt Fig. 10. Beim Versuch ordnete sich die gefärbte Flüssigkeit in den schraffierten Bereichen an. Für gegenläufige Rotation ergibt sich das Bild Fig. 11. Photographische Aufnahmen bestätigten völlig das erste Bild, das zweite konnte aus technischen Gründen nur für die inneren Wirbelgebilde bestätigt werden.

Die Stellen des Umschlags aus der einen in die andere Strömungsform, bzw. die Grenze zwischen stabilem und unstabilem Gebiet zeigt Fig. 12, die gleichzeitig die vorzügliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment veranschaulicht. Als Abszisse ist aufgetragen die (durch die kinematische Zähigkeit dividierte) Winkelgeschwindigkeit des äußeren, als Ordinate die des inneren Zylinders. Solche Versuchsreihen wurden für drei Abmessungen des inneren Zylinders ausgeführt. Als ein wichtiges Ergebnis, das auch aus dem Diagramm unmittelbar zu ersehen ist, ist hervorzuheben die Aufrechterhaltung der Stabilität, wenn der innere Zylinder ruht, oder wenn der äußere gleichläufig mit dem inneren, jedoch schneller als dieser rotiert.

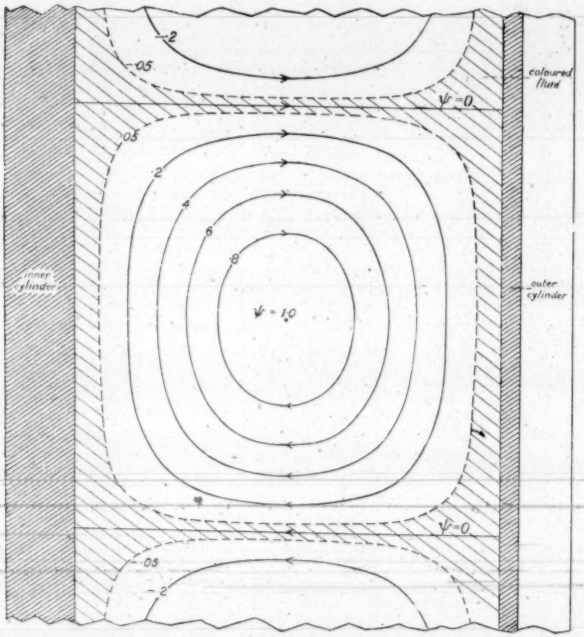

-2
-05
coloured fluid
ψ=0
05
2
6
8
inner cylinder
outer cylinder
ψ=1.0
ψ=0
-05
-2

Fig. 10.

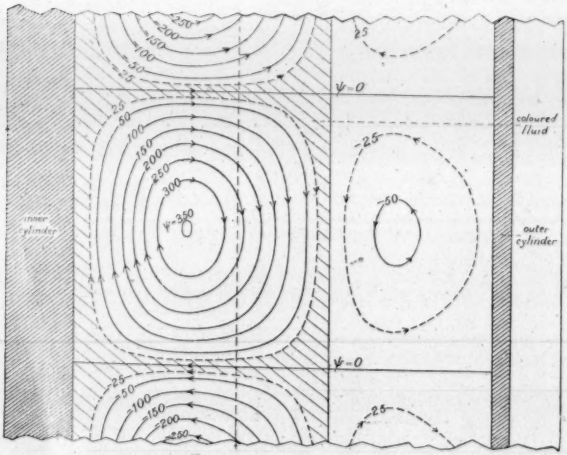

-250
-200
-150
-100
-50
-25
25
ψ=0
coloured fluid
25
50
100
150
200
250
300
inner cylinder
ψ=350
-25
-50
outer cylinder
ψ=0
-25
-50
-100
-150
-200
-250
25

Fig. 11.

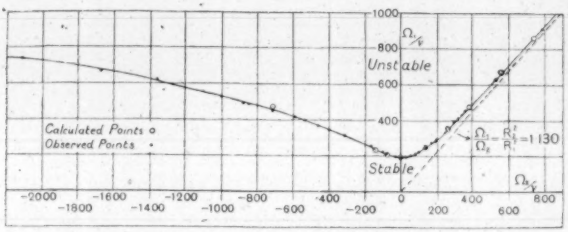


Fig. 12.

Bei alledem kann jedoch kein Zweifel darüber bestehen (worüber sich übrigens auch Taylor selbst in Delft 1924 geäußert hat), daß die hier beschriebene in gewissen Grenzen stabile regelmäßige Wirbelbewegung nicht wesensgleich ist mit der bisher behandelten „turbulenten" Bewegung, deren Charakteristikum gerade durch die Ungeordnetheit gegeben ist. Diese ungeordnete Turbulenz erhielt nach einer kurzen Bemerkung hierüber Taylor auch selbst, wenn er die Geschwindigkeit wesentlich über die Stabilitätsgrenze hinaus steigerte. Man hat den Eindruck, daß Taylor infolge der Vollkommenheit seines Apparates die Grenze für das Eintreten der wirklichen Turbulenz gegenüber den früheren Autoren in gleicher Weise hinaufgesetzt hat, wie man bei Strömung in Rohren dies durch Herabsetzung der Anfangsstörungen ja auch erreichen kann.

In ähnlicher Richtung wie Taylors Ergebnisse liegen Versuche von Zemplén (50) mit einer Kugel, die innerhalb einer konzentrischen zweiten Kugel rotierte. Der Zwischenraum war mit Flüssigkeit ausgefüllt. Bis zu dem höchsten erreichten Wert von $R = 5000$ war hier kein Eintritt von Turbulenz festzustellen.

B. Untersuchung der turbulenten Strömung.

Über die turbulente Strömung liegen, insbesondere für Flußläufe und offene Gerinne, außerordentlich zahlreiche ältere und neuere Untersuchungen vor, sowohl über Geschwindigkeitsverteilung als auch die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Gefälle. Bei der überwiegenden Mehrzahl dieser Untersuchungen spielt die Wandrauhigkeit eine erhebliche Rolle. Sie beeinflußt die ganzen Vorgänge in ebenso starker wie schwer zu übersehender Weise. Zu einer wirklich systematischen Erfassung des Rauhigkeitseinflusses liegen bis heute nur die ersten Ansätze vor. Da die hier einschlägigen Versuche des einfacheren Überblicks wegen bisher vorwiegend in Rohren und geschlossenen, völlig von der Flüssigkeit erfüllten Rinnen ausgeführt wurden, werden wir uns neben den Untersuchungen in glatten Rohren im wesentlichen auf die letztgenannten beschränken und verweisen wegen der zuerst genannten Arbeiten auf die hydraulische Literatur, insbesondere das umfassende Lehrbuch der Hydraulik von Forchheimer, aus dem auch einige der folgenden Angaben entnommen sind.

1. Die Geschwindigkeitsverteilung.

Aus der Messung der Geschwindigkeitsverteilung an offenen Gerinnen wußte man schon seit längerer Zeit, daß die turbulente Strömung jedenfalls eine gleichmäßigere Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt besitzt, als die Poiseuillesche Laminarströmung im Rohr. Messungen der Geschwindigkeitsverteilung (über das Methodische s. oben unter A 4) an einem gut geglätteten Zementrohr von 80 cm l. W. führten Bazin (39) zu einem Verteilungsgesetz nach einer Viertelellipse. An deren Stelle setzte Christen (40) eine Parabel achter Ordnung:

$$u = u_{\max}\left(\frac{a - r}{a}\right)^{1/8}, \qquad (38)$$

wobei a den Halbmesser und r den Abstand des Meßpunktes von der Achse bedeutet.

Diese, wie auch andere parabolische Gesetze, haben zur Folge, daß die beiden Äste der Kurve sich in der Mitte unter einem bestimmten Winkel treffen, was der Wirklichkeit nicht entspricht. Man kann dies in den Formeln nach v. Kármán ((41) S. 240) dadurch einfach abändern, das Profil „abrunden", daß man setzt:

$$u = u_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^n\right)^{1/n}, \qquad (39)$$

worin man n etwa einen Wert zwischen 1 und 2 erteilt.

Im Zusammenhang mit dem Verteilungsgesetz steht das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der Achse $\frac{u}{u_{\max}}$, das vor allem praktisch insofern von Bedeutung ist,

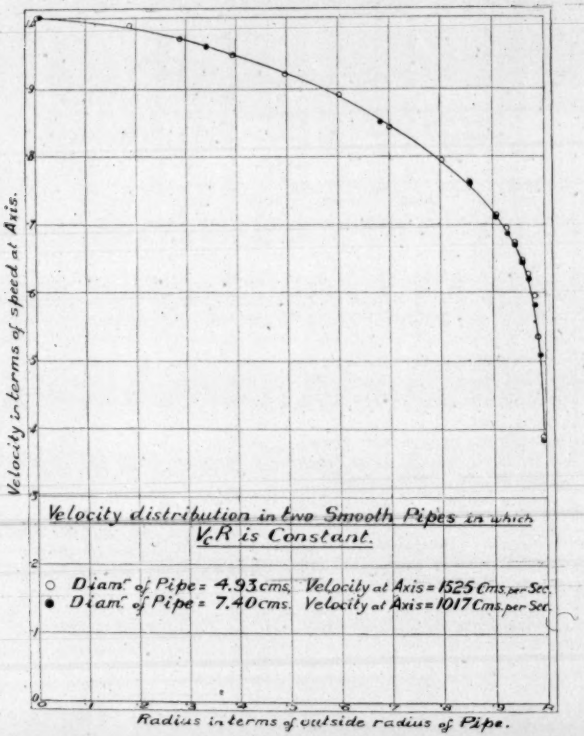


Fig. 13.

als man bei seiner Kenntnis in der Lage ist, lediglich aus Messungen der Geschwindigkeit in der Mitte die Durchflußmenge zu bestimmen. Für eine Parabel 7. Ordnung ergibt sich $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = 0{,}816$.

Aus zahlreichen Messungen fanden Williams, Hubbel und Fenkell (42) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = 0{,}84 \pm 3$ Proz., Saph und Schoder (43) fanden 0,827, Mills (44) an einem Rohr von fast 3 m Durchmesser 0,857. Außerdem stellte Mills eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit fest: Bei einer Steigerung von 0,37 auf 4,09 m/sec in einem Rohre von 30 cm Durchmesser stieg $\frac{\bar{u}}{u_{max}}$ von 0,829 auf 0,856. Die Geschwindigkeitsprofile bleiben sich also nicht ähnlich.

Diese letztere Frage ist Gegenstand einer Untersuchung von Stanton (45). Nach dem Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz ist ein ähnliches Profil zu erwarten für $R = \text{const}$. Fig. 13 zeigt die vorzügliche Bestätigung am Geschwindigkeitsprofil zweier glatter Messingrohre von 4.93 bzw. 7,40 cm l. W. für Geschwindigkeiten in der Achse von 1525 bzw. 1017 cm/sec. Bei einer Veränderung der Reynoldsschen Zahl im Verhältnis 1 : 4 trat eine merkliche Änderung, vor allem in der Randpartie auf, in dem Sinne, daß der höheren Reynoldsschen Zahl ein höheres relatives Geschwindigkeitsgefälle an der Wand entsprach. Dagegen lieferten zwei Rohre, denen durch Einschneiden eines Gewindes in die Wand — unter Einhaltung der geometrischen Ähnlichkeit — eine hohe Rauhigkeit erteilt wurde, bei Veränderung der Reynoldsschen Zahl im Verhältnis 1 : 2 noch völlig übereinstimmende Pro-

file. Ähnliche Strömung bei verschiedenem R bedeutet aber (nach Gl. (34)) konstanten Wert von λ im Widerstandsgesetz, was für rauhe Rohre bei hohen R-Werten tatsächlich gefunden wird.

Eine systematische Untersuchung, wie sich $\frac{\bar{u}}{u_{max}}$ mit der Reynoldsschen Zahl bei glatten Rohren ändert, stammt von Stanton und Pannell ((8) S. 204). Ihre Ergebnisse, die sich bis zu höheren R-Werten (42000) erstrecken, zeigen bis zu diesen immer noch ein Ansteigen des Verhältnisses (höchster gemessener Wert ca. 0,81) und bei der kritischen Zahl ein rapides Abfallen auf den Poiseuilleschen Wert. Außerdem ist in ihnen wegen der starken Verschiedenheit in den Durchmessern wieder eine sehr gute Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes zu sehen.

Durch Ausarbeitung einer besonderen Art von Staurohr gelang es Stanton, Marshall und Bryant (46), die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand bis auf 0,03 mm Wandabstand zu messen. Aus der von ihnen gefundenen Proportionalität des Geschwindigkeitsgefälles an der Wand mit dem Druckabfall bei verschiedenen Geschwindigkeiten läßt sich die Existenz einer dünnen laminaren Schicht an der Wand folgern. Auch weisen die Versuche darauf hin, daß die Geschwindigkeit an der Wand tatsächlich Null ist, d. h. kein Gleiten stattfindet.

Bei Messung kleiner Geschwindigkeiten in Wandnähe mit feinen Piotröhrchen ist nach Miss Barker (47) zu beachten, daß die Geschwindigkeitsbestimmung mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung (s. o. A. 4.) infolge der zunehmenden Zähigkeitseinflüsse aufhört gültig zu sein, also nicht mehr anwendbar ist. Die Grenze liegt etwa bei $R = \frac{a\,u}{\nu} = 30$, worin a den Halbmesser der Röhrchenmündung und u die Geschwindigkeit an der Meßstelle bedeutet.

Ausführlichere neuere Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an Kreisrohren, dreieckigen und viereckigen Rohren, sowie im offenen Gerinne liegen vor in einer bisher unveröffentlichten Göttinger Dissertation von Nikuradse. Sie zeigen unter anderem die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand nach dem $^1/_7$ Potenzgesetz (für die dort benutzten Reynoldsschen Zahlen). Es wäre sehr zu wünschen, daß die vielen interessanten Einzelheiten (z. B. Höhenliniendarstellungen der Geschwindigkeiten für die verschiedenen Formen) durch Veröffentlichung bald einem weiteren Kreis zugänglich gemacht würden.

Ferner wurden im Leipziger Physikalischen Institut durch Kirsten einschlägige (bisher unveröffentlichte) Messungen mit verschiedenen Reynoldsschen Zahlen im Bereich $R = 11000$ bis 44000 ausgeführt. Für $\frac{\bar{u}}{u_{max}}$ ergab sich durchschnittlich 0,81, für den Exponenten der Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand $^1/_7$ bis $^1/_8$, wobei letzterer Wert dem höchsten R zugeordnet ist. Auch wurde die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung längs der Anlaufstrecke aufgenommen. Fig. 14 zeigt eine solche Entwicklung für abgerundeten Einlauf und $R = 29000$. Bei $R = 11000$ gelang aus Druckabfallmessungen längs der Anlaufstrecke der Nachweis, daß auf eine gewisse Strecke (ganz analog Messungen von Burgers und van der Hegge Zijnen an einer Platte (24)) die Entwicklung nach der laminaren Anlauftheorie Schillers, also rein laminar vor sich geht. Die Art der Entwicklung wird jedoch wesentlich von Art des Einlaufs, d. h. den Anfangsstörungen abhängen. So wird man bei scharfem Einlauf Kontraktion und damit Ablösung und Wirbelbildung gleich am Einlauf haben, wodurch die Entwick-

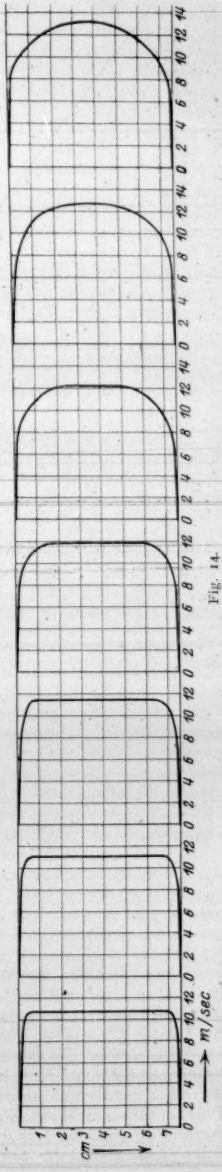


Fig. 14.

lung notwendig beeinflußt werden wird. Messungen hierüber sind im Gang. Es wird schwer sein, für den turbulenten Anlauf eine Theorie zu finden, die allem gerecht wird. Jedenfalls haben unsere bisherigen Messungen wesentliche Differenzen gegenüber einer von Latzko (48) aufgestellten Theorie für den turbulenten Anlauf ergeben.

Von experimentellen Gesichtspunkten aus interessant ist eine von Zeeman (49) angegebene optische Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit in der Achse. Zeeman mischt dem Wasser Luftblasen bei, die intensiv beleuchtet und in einem rotierenden Spiegel betrachtet werden. So gelingt es ihm sehr gut, die Geschwindigkeit der Blasen zu bestimmen. Er erhält für $\frac{\overline{u}}{u_{max}}$ den Wert 0,85.

2. Das empirische Widerstandsgesetz der turbulenten Rohrströmung.

In Abschnitt A 5 haben wir bereits die der Ähnlichkeitsmechanik entsprechende Form des Widerstandsgesetzes aufgestellt:

$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda \frac{\varrho \overline{u}^2}{2a}, \qquad (25)$$

worin λ eine noch unbekannte Funktion lediglich von R ist.

Bevor man (in England durch Reynolds und Rayleigh, in Deutschland durch Blasius und v. Mises) zu einem dem Ähnlichkeitsprinzip entsprechenden Gesetz gelangte, war es außerordentlich schwer, aus den zahlreichen Messungen das Wesentliche herauszuschälen, zumal diese meist stark durch vielfach unkontrollierbare Wandrauhigkeit beeinflußt waren. Auch hierin hat Reynolds wertvollste Pionierarbeit geleistet. Aus eigenen Messungen (bis $R = 28000$) an glatten Bleirohren stellte er ein dem Ähnlichkeitsprinzip entsprechendes Widerstandsgesetz auf, wonach der Widerstand proportional der 1,723ten Potenz der Geschwindigkeit wächst. Auch diskutierte er zahlreiche ältere Messungen von Darcy (bis etwa $R = 600000$) und fand aus ihnen, je nach der Wandbeschaffenheit der Rohre, als Exponenten im Widerstandsgesetz 1,79 bis 2.

Später hat Blasius (18) aus dem sehr reichhaltigen und guten Versuchsmaterial von Saph und Schoder (13) an glatten Metallrohren die Funktion λ für glatte Rohre in einem größeren Bereich von R-Werten festgelegt. Die mit Wasser ausgeführten Messungen von Saph und Schoder erstreckten sich bis zu $R = 50000$. Die von Blasius durchgeführte logarithmische Auftragung mehrerer Hunderte von Meßpunkten ließ erkennen, daß in dem genannten Bereich ein einfaches Potenzgesetz für praktische Zwecke die Verhältnisse ausreichend darstellt. So bestimmte Blasius

$$\lambda = \frac{0{,}1582}{\sqrt[4]{2R}}, \qquad (40)$$

d. h. in der logarithmischen Auftragung ist λ als $F(R)$ eine mit der Neigung $\frac{1}{4}$ fallende Gerade (vgl. z. B. Fig. 6). Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit ist hiernach gegeben als $W \sim \overline{u}^{1{,}75}$, also nicht sehr verschieden von der nach Reynolds. Daß übrigens die Streuung auch in den Messungen von Saph und Schoder nicht unerheblich ist, erkennt man daraus, daß Blasius aus verschiedenen Serien willkürlich aus der ganzen Reihe herausgegriffener λ-Werte[1]) für

$$\lambda = c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{1}{2R}\right)^{c_3}$$

folgende Tripel der $c_1 \ldots c_3$ erhielt: 0,0014, 0,1902, 0,28; 0,0034, 0,3208, 0,35; 0,0011, 0,1321, 0,225; 0,0015, 0,189, 0,28.

Messungen von Ombeck (51) mit Luft bis $R = 240000$ führten diesen zu einem etwas abweichenden Potenzgesetz:

$$\lambda = \frac{0{,}121}{\sqrt[4{,}17]{2R}}. \qquad (41)$$

Ungefähr gleichzeitig führten Stanton und Pannell (8) eine große Reihe von Versuchen mit Wasser und Luft bis $R = 215000$ aus, nach denen sie die Ansicht faßten, daß die Beobachtungen sich nicht durch ein einfaches Potenzgesetz darstellen ließen. Ihre Messungen sind in Fig. 15 (halblogarithmisch) dargestellt. Aus ihnen stellte Lees (52) das Gesetz auf:

$$\lambda = 0{,}00357 + 0{,}3052 \cdot (2R)^{-0{,}35}.$$

Schiller (28) führte Messungen mit Wasser bis $R = 200000$ aus und stellte sich — trotz gewisser Abweichungen bei den höchsten R-Werten — auf den Standpunkt, daß das Blasiussche Potenzgesetz noch bis zu diesem Wert anwendbar sei.

Neuerdings haben nun Jakob und Erk (54) auch eine ausgedehnte Versuchsreihe bis $R = 230000$ ausgeführt mit dem Resultat, daß der von ihnen erhaltene Kurvenverlauf sich weitgehend mit dem von Stanton und Pannell deckte. Daraufhin hat Schiller (53) sein Material einer erneuten Prüfung unterzogen und dabei festgestellt, daß sein Kurvenverlauf bei den hohen R tatsächlich auch die gleiche Abweichung von dem Blasiusschen Potenzgesetz

[1]) Die betr. benutzten λ waren dabei auch schon wieder Mittelwerte für die betr. R.

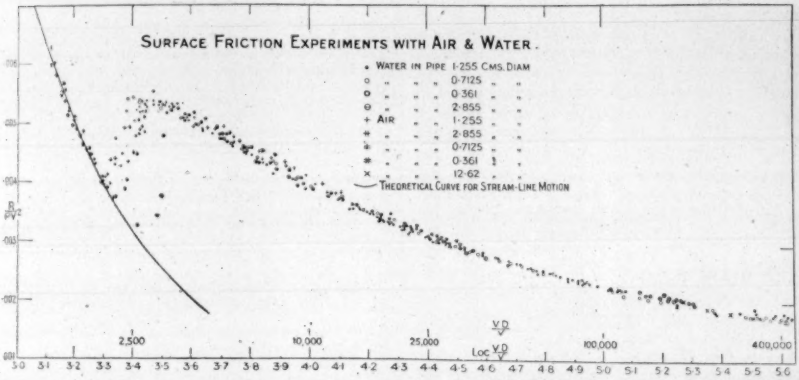


Fig. 15.

zeigt, wenn auch die Punkte durchweg etwas tiefer liegen als bei Stanton und Jakob. Man wird sonach in Stantons und Pannells bzw. Lees' Gesetz wohl das richtigste zu sehen haben. Allerdings sprechen erhebliche Streuungen zwischen den verschiedenen Messungen (so hat Jakob eine ganze Reihe einfach ausgeschaltet) dafür, daß die Angabe zu vieler Dezimalen keine Berechtigung hat. Unkontrollierbare Verschiedenheiten der Oberfläche scheinen gerade bei diesen R-Werten unter Umständen von erheblichem Einfluß zu sein. Jedenfalls muß man mit mehreren Prozent Abweichungsmöglichkeit rechnen.

Zu erwähnen ist hier noch, daß nach Messungen von Schiller (28) sich der hydraulische Radius für die verschiedensten Berandungen im Widerstandsgesetz vorzüglich bewährt; führt man ihn statt des Rohrhalbmessers in R und λ ein, so kann man (selbst für gewellte Berandung[1]) den Widerstand nach dem für Kreiszylinderrohre gültigen Widerstandsgesetz mit ausreichender Genauigkeit berechnen.

Durch Wandrauhigkeiten wird der Widerstand im turbulenten Gebiet stets mehr oder weniger, u. U. bis zum Zehnfachen und darüber hinaus erhöht. Vom Standpunkt des Ähnlichkeitsgesetzes aus tritt in das Widerstandsgesetz neben der Reynoldsschen noch eine neue Dimensionslose, die die Rauhigkeit enthält, z. B. etwa $\frac{\varepsilon}{a}$, worin ε eine für die Rauhigkeit charakteristische Länge, etwa die Höhe der Erhebungen bedeutet. Daß hierbei aber auch noch die Form der Rauhigkeit, die Abstände zwischen den einzelnen Rauhigkeitselementen usw. mitsprechen, versteht sich von selbst (vgl. hierüber Hopf (55) S. 331). So kann es nicht wundernehmen, daß es bis jetzt noch nicht gelungen ist, für rauhe Wandungen ein ähnlich umfassendes Gesetz aufzustellen, wie für glatte Wandung. Ein dem Ähnlichkeitsgesetz entsprechender Ansatz hierfür wurde von v. Mises ((56) S. 62 ff.) angegeben, der für praktische Zwecke sicher sehr gute Dienste leisten kann. Hopf (55) S. 333—337 hat das Verdienst, das gesamte Material einer gründlichen Durchmusterung unterzogen zu haben und dabei zur Aufstellung dreier Haupttypen für das Widerstandsgesetz gekommen zu sein (s. auch diese Zeitschr. **26**, 477, 1925, Fig. 3). Die erste vereinigt alle Arten grober, scharfer Rauhigkeiten und liefert ein quadratisches Widerstandsgesetz, wobei die λ-Kurven vielfach weit oberhalb des Blasiusschen Gesetzes liegen. Die zweite enthält mehr wellige Formen (Holzröhren, asphaltierte Eisenröhren) und liefert wohl höhere λ-Werte als Blasius, gehorcht aber, selbst bei recht starken Wellen (Schiller (28) S. 12), mehr oder weniger auch demselben Potenzgesetz (Widerstand $\sim \bar{u}^{1,75}$). Die dritte Form schließlich gehört gezogenen Metallröhren an (mit nicht ganz glatter Oberfläche) und liefert im wesentlichen einen allmählichen Übergang vom 1,75 nach dem quadratischen Gesetz hin (ähnlich wie das glatte Rohr bei hohen R-Werten). Der allgemeine Eindruck, den man aus der Gesamtheit aller Messungen (vgl. dazu Fromm (29), z. B. oben Fig. 9 und Schiller (28)) gewinnt, ist der, daß schließlich — d. h. bei genügend hohen R —

[1] Nicht zu verwechseln mit der unten (nebenstehende Spalte) erwähnten „welligen Wandung". Bei der „gewellten Berandung" sind Berge und Täler parallel zur Rohrachse, bei der „welligen Wandung" senkrecht dazu.

für alle Wandungen, von den glattesten bis zu den rauhesten, das quadratische Widerstandsgesetz erreicht wird. Auch für die ganz kleinen Rauhigkeitsindividuen des technisch glatten Rohres wird schließlich mit zunehmender Geschwindigkeit das von den umströmten Körpern her geläufige quadratische Widerstandsgesetz gültig werden und sich in dem Gesetz des Rohres widerspiegeln. Maßgebend für den Betrag der λ-Werte und für die Stellen charakteristischer Änderungen im Verlauf der λ-Kurve ist stets die relative Rauhigkeit (zum ersteren vgl. z. B. oben Fig. 9 (Fromm), zum zweiten s. bei Schiller (53) S. 478). So wird ein technisch glattes enges Rohr schon bei einer Reynoldsschen Zahl „hydrodynamisch rauh" sein, d. h. erhöhte λ zeigen, bei der ein weites mit gleicher Oberfläche noch dem Blasiusschen Gesetz gehorcht. Denn die Geschwindigkeit am Ort der Rauhigkeit ist wegen des verschiedenen Geschwindigkeitsprofils im ersten Falle wesentlich erhöht (vgl. hierzu z. B. Schiller (53)). So erklären sich die erhöhten λ bei „glatten" Metallkapillaren (Ruckes (7)) und vielleicht auch bei den Glaskapillaren von Wildhagen (10).

Literatur.

1) Hagen. Über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Math. Abh. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin aus dem Jahre 1854, S. 17 bis 98, 1855.

2) O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. of the Roy. Soc. 1883 and Papers II, S. 51—105.

3) Th. v. Kármán, Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 395—396, 1923.

4) E. G. Coker u. S. B. Clement, An experimental determination of the variation with temperature of the critical velocity of flow of water in pipes. Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London (A), **201**, 45—61, 1903.

5) H. T. Barnes u. E. G. Coker, Experiments on Stream-line Motion and the Measurement of Critical Velocity. Proc. of the Roy. Soc. of London **74**, 341—356, 1905.

6) V. Walfrid Ekman, On the Change from Steady to Turbulent Motion of Liquids. Ark. f. Math., Astr. och Fysik **6**, Nr. 12, 1911.

7) W. Ruckes, Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen. Würzburger Dissert., Leipzig 1908; auch: Ann. d. Phys. (4) **25**. 983 ff., 1908.

8) T. E. Stanton u. J. R. Pannell, Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids. Philos. Trans. of the Royal Soc. of London (A) **214**, 199—224, 1914.

9) K. W. Fritz Kohlrausch, Über das Verhalten strömender Luft in nicht kapillaren Röhren. Ann. d. Phys. (4) **44**, 297—320, 1914.

10) Max Wildhagen, Über den Strömungswiderstand hochverdichteter Luft in Rohrleitungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 181—197, 1923.

11) W. Sorkau,
a) Experimentelle Untersuchungen über die innere Reibung einiger organischer Flüssigkeiten im turbulenten Strömungszustande. Physik. Zeitschr. **12**, 582, 1911.
b) Über den Einfluß von Temperatur, spezifischem Gewicht und chemischer Natur von Flüssigkeiten auf die Turbulenzreibung. **13**, 805, 1912.
c) Über den Zusammenhang zwischen Molekulargewicht und Turbulenzreibungskonstante. **14**, 147, 1913.
d) Zur Turbulenzreibung des Wassers (I) **14**, 759, 1913.
e) Zur Turbulenzreibung des Wassers (II). **14**, 828, 1913.
f) Zur Kenntnis der Turbulenzreibung. **15**, 582, 1914.
g) Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren (I). **15**, 768, 1914.
h) Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren (II). **16**, 97, 1915.
i) Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren (III). **16**, 101, 1915.

12) T. Ugarte, Investigación experimental sobre las corrientes de turbulencia en tubes capilares. Buenos Aires 1913.

13) Saph u. Schoder, Transact. of the American Society of Civ. Eng. **51**, 253, 1903.

14) J. Morrow, On the Distribution of Velocity in a Viscous Fluid over the Cross-Section of a Pipe, and on the Action at the Critical Velocity. Proc. of the Roy. Soc. of London (A) **76**, 205—216, 1905.

15) J. D. Fry and A. M. Tyndall, On the Value of Pitot Constant. Phil. Mag. (6) **21**, 348—366, 1911.

16) J. J. Dowling, Steady and Turbulent Motion in Gases. Roy. Dub. Soc. Proc. **13**, 375, 1912.

17) Rayleigh, Philosoph. Magaz. **48**, 321, 1899.

18) Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens. Heft 131, 1913.

19) Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. **109**, 385, 1860.

20) L. Schiller, Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung.
a) Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens. Heft 248, 1922, auch
b) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **2**, 96—106, 1922, ferner
c) Physik. Zeitschr. **23**, 14—19, 1922.

21) L. Schiller u. H. Kirsten, Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken. Physik. Zeitschr. **22**, 523—528, 1921.

22) L. Schiller, Neue Versuche zum Turbulenzproblem. Physik. Zeitschr. **25**, 541—544, 1924.

23) —, Grenzschichtdicke und kritische Zahl. Physik. Zeitschr. **26**, 64—69, 1925.

24) J. M. Burgers u. B. G. van der Hegge Zijnen, Preliminary Measurements of the Distribution of the Velocity of a Fluid in the immediate Neighbourhood of a plane smooth Surface. Verh. d. Kon. Akad. v. Wetenschap. te Amsterdam (I) XIII, Nr. 3 (Meded. Nr. 5, uit het Labor. voor Aerodyn. en Hydrodyn. der Techn. Hoogesch. te Delft), S. 32; B. G. van der Hegge Zijnen, Measurements of the Velocity Distribution in the boundary Layer along a plane Surface. Thesis Delft 1924. (Mededel. Nr. 6 uit het Labor. voor Aerodyn. en Hydrodyn. der Techn. Hoogesch. te Delft), S. 25/6.

25) A. H. Gibson, On the flow of water trough pipes and passages. Proc. Roy. Soc. **83**, 366, 1910.

26) G. Lechner, Untersuchungen der Turbulenz bei Wasser und Quecksilber beim Fließen durch spiralförmig gewundene Kapillaren. Ann. d. Phys. **42**, 614, 1913.

27) L. Schiller, Rauhigkeit und kritische Zahl. Ein experimenteller Beitrag zum Turbulenzproblem. Zeitschr. f. Phys. **3**, 412—416, 1920.
28) —, Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauhigkeitsgrades. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 2—13, 1923.
29) K. Fromm, Strömungswiderstand in rauhen Rohren. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 339—358, 1923.
30) C. Schaefer u. G. Heisen, Experimentelle Beiträge zur Strömung von Flüssigkeiten in Röhren. Zeitschr. f. Phys. **12**, 165, 1923.
31) E. Becker, Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten und ihre Beziehungen zum Poiseuilleschen Gesetz. Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, Heft 48, 1907.
32) R. Winkel, Die Wasserbewegung in Leitungen mit Ringspalt-Durchflußquerschnitt (Labyrinthdichtungen). Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 251—257, 1923.
33) Th. Lonsdale, The Flow of Water in the Annular Space between two Coaxial-Cylindrical Pipes. Phil. Mag. (6). **46**, 163—169, 1923.
34) L. Hopf, Turbulenz bei einem Flusse. Münchener Dissert. Leipzig 1910 (auch Ann. d. Phys. (4) **32**, 777—808, 1910).
35) M. M. Couette, Etudes sur le Frottement des Liquides. Ann. d. Ch. et Phys. (6) **21**, 433, 1890.
36) Mallock, Determination od the Viscosity of Water. Proc. Roy. Soc. **45**, 126—132, 1888.
37) Mallock, Experiments on Fluid Viscosity. Phil. Trans. (A) **187**, 41.
38) G. J. Taylor, Stability of a Viscous Liquid contained between two rotating Cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London (A) **223**, 289—343, 1923.
39) Bazin, Mém. prés. par. div. sav. **32**, Nr. 6, 1902.
40) Christen, Zeitschr. f. Gewässerkunde **6**, 175, 1904.
41) Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 233—251, 1921.
42) Williams, Hubbel and Fenkell, Am. Soc. Civ. Eng. Trans. **47**, 182, 1902
43) Saph and Schoder, ebenda S. 312.
44) Mills, ebenda S. 204.
45) T. E. Stanton, The Mechanical Viscosity of Fluids. Proc. Roy. Soc. London (A) **85**, 366, 1911.
46) Stanton, Marshall and Bryant, Proc. Roy. Soc. London **97**, 413, 1920.
47) Barker, Proc. Roy. Soc. **101**, 435, 1922.
48) H. Latzko, Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 268, 1921.
49) Zeeman, Ak. v. Wetenschap. te Amsterdam. Nat. k. Afd. **25**, 1366, 1916.
50) Zemplén u. Pogány, Ann. d. Phys. **49**, 39, 1916.
51) Ombeck, Forsch.-Arb. a. d. Geb. d. Ing.-Wes. Heft 158/159, 1914.
52) Lees, Proc. Roy. Soc. London (A) **91**, 46, 1915.
53) Schiller, Phys. Zeitschr. **26**, 476, 1925.
54) Jakob u. Erk, Forsch.-Arb. a. d. Geb. d. Ing.-Wes. **267**, 1924.
55) Hopf, Die Messung der hydraulischen Rauhigkeit. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. **3**, 329, 1923.
56) v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik. I 1914, S. 62.
57) Grindley und Gibson, Proc. Roy. Soc. A. **80**, 114, 1907.

(Eingegangen 30. Juli 1925).

BESPRECHUNGEN.

Bruno Bauch, Das Naturgesetz. Ein Beitrag zur Philosophie der exakten Wissenschaften. (Wissenschaftliche Grundfragen. Philos. Abhandl. herausgegeben von K. Hönigswald. I.) Gr.-8°. VII u. 76 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1924. M. 2.80.

Bauch gibt vom Standpunkte der Marburger Schule aus eine Analyse des Naturgesetzes. Zunächst scheidet er es von der Regel. Die Regel ist subjektsbezogen. Das Naturgesetz ist durch die subjektsunbezogene Sachnotwendigkeit bestimmt. Naturgesetze sind keine real-wirklichen Gegenstände, aber auch keine bloßen Abstraktionen, keine bloßen Namen. Seinem Typus nach ist das Naturgesetz Begriff, aber ein Begriff besonderer Art. Der Begriff ist im allgemeinen die Allheit der Bedingungen seiner Besonderheiten, das Naturgesetz ist nur die Allheit der Bedingungen der Besonderheiten, die zugleich Einzelnes sind. Das Besondere ist unwiederholbar, das Einzelne ist wiederholbar. Ist das Naturgesetz Begriff, so ist es wie jeder Begriff funktional, d. h. jeder Begriff ist als Bestimmender bestimmt, als Prinzip der Zusammengehörigkeit, der Zuordnung. Es ist endlich auch die Voraussetzung der Naturbegreiflichkeit.

In diesen wenigen Worten läßt sich weder der reiche Inhalt noch die exakte Form wiedergeben. Ich bin nun zwar mit vielem, was Bauch sagt, nicht einverstanden. So meine ich z. B., daß die Regelmäßigkeit von Naturerscheinungen auf Gesetzlichkeit beruht, daß es noch mehr Voraussetzungen der Naturbegreiflichkeit gibt. Aber trotzdem wäre es gut, wenn auch mancher Physiker die Schrift läse, weil es in Wahrheit wissenschaftliche Philosophie ist. In einer Zeit, wo die Weltanschauungsjournalistik ihre Blüten treibt, und wo jeder Nichtphilosoph alle allgemeinen Gedanken, die er sich gebildet hat, für Philosophie hält, kann man derartigen Arbeiten nur recht viele Leser gerade in nichtphilosophischen Kreisen wünschen.

Aloys Müller.

W. Ludwig, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Dritter Teil. Das rechtwinkelige Zweitafelsystem. Axonometrie, Perspektive. 8°. 169 Seiten, 47 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1924. M. 5.70.

Gerade der dritte Band dieses Werkes kann einem Studierenden der Physik wohl empfohlen werden. In kurzer und übersichtlicher Weise werden darin zunächst die geometrischen Eigenschaften von Schraubenlinien und Schraubenflächen, sowie einiger anderer häufig auftretender räumlicher Gebilde behandelt. Die anschauliche Auffassung tritt dabei in den Vordergrund, so daß eine sorgfältige Lektüre des Buches eine Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens vermittelt, dessen Mangel sich bei der Auffassung verwickelter Konfigurationen, etwa in gewissen Teilen der Mechanik der Kontinua oder der Elektrodynamik, sehr leicht dem Fortschritt des Verständnisses störend entgegenstellt. Im zweiten Abschnitt sind die sog. axonometrischen Abbildungsmethoden besprochen. Diese finden bekanntlich ihrer Anschaulichkeit wegen zunehmende Verbreitung, weswegen es nicht unnützlich ist, ihre geometrischen Prinzipien einmal zu durchdenken und dabei einzusehen, daß es keiner beson-

deren Mühe bedarf, auch richtige Bilder zeichnen zu können.

Den Schluß des Werkes bilden die Gesetze der Zentralprojektion und ihre Anwendung auf perspektivisches Zeichnen und die Grundlagen der Photogrammetrie, die allerdings etwas kurz weggekommen ist.

Das Ziel, das sich der Verfasser gesteckt hat: „Freude an der Gestalt" zu erwecken, wird bei einem einigermaßen darauf eingestellten Leser sicher erreicht werden und vielfache Früchte tragen! v. Sanden.

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. V.) 8°. VIII u. 194 S. Berlin, Julius Springer. 1923. M. 7.—, geb. M. 8.50.

Die Theorie der endlichen Gruppen ist in neuerer Zeit durch die Untersuchungen mehrerer Forscher erheblich gefördert worden, und so ist eine neue Darstellung dieser Disziplin von dem gegenwärtig erreichten Standpunkt sehr zu begrüßen. Die Darstellung, welche Speiser — der selbst an der Forschung in dieser Theorie beteiligt ist — in dem vorliegenden Buche gibt, hat überdies den Vorzug, daß sie durch ihre gedrungene und übersichtliche Form den Leser anregt und ihn mit schnellen Schritten in die Begriffswelt der Theorie hineinführt. Z. B. wird der Gedankengang der Galoisschen Gleichungstheorie auf wenigen Seiten in vorbildlicher Einfachheit und Übersichtlichkeit entwickelt.

So ist das Buch besonders zum Studium geeignet. Insbesondere liefert es dem Leser auch eine gute Orientierung über die einschlägige Literatur und über die gegenwärtig in der Theorie der endlichen Gruppen vorliegenden Probleme, so daß er befähigt wird, selbständig auf diesem wichtigen und schönen Gebiete der Mathematik mitzuarbeiten. P. Bernays.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2., verb. und verm. Aufl. IV. Bd., 1. Abtlg.: Das konstante elektrische Feld. Herausgegeben von G. Schmidt. 8°. 28 Bogen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1925. Geh. M. 14.—, geb. M. 16.—.

Die großen Vorzüge des Chwolsonschen Lehrbuches haben wir bei der Besprechung der vorhergehenden Bände genügend gewürdigt und hervorgehoben. Auch der vorliegende IV. Band zeigt diese sehr deutlich. In der Einleitung begründet Chwolson zunächst die Einteilung des IV. Bandes in 1. Konstantes elektrisches Feld, 2. Konstantes Magnetfeld und 3. Veränderliches magnetisches (elektromagnetisches) Feld. — Ausgehend von den Eigenschaften des konstanten elektrischen Feldes (1. Kap.) werden im 2. Kapitel die Quellen des elektrischen Feldes behandelt. Beide Kapitel lesen sich leicht und verständlich. Es berührt uns sehr angenehm, daß Chwolson sehr modern und überaus geschickt diese beiden Abschnitte ordnet und behandelt. Im 3. Kapitel werden die Wirkungen des elektrischen Feldes auf die in demselben befindlichen Körper gewürdigt. Auch hier wird die große Fülle von Tatsachen und Beweisen wohl geordnet und klar begründet. Im folgenden Kapitel „Elektrische Messungen" werden diese zwar knapp, aber sehr präzise geboten. Das Schlußkapitel handelt von der Elektrizität der Atmosphäre. Es werden die Methoden und Resultate der Untersuchung des Erdfeldes geschildert, Erscheinungen, die auf demselben beruhen, und vor allem wird der Stand der Theorien der erdelektrischen Erscheinungen mustergültig wiedergegeben. — Die reiche Angabe der Literatur am Ende jedes Kapitels ist überaus praktisch. Wir können diesen neuesten Band des Chwolsonschen Lehrbuches in seinem Schmidtschen Gewande jedem, der sich für Physik interessiert, nur wärmstens empfehlen. Karl Bergwitz.

Joh. v. Kries, Immanuel Kant und seine Bedeutung für die Naturforschung der Gegenwart. 8°. IV u. 127 S. Berlin, J. Springer. 1924. M. 3.90.

J. v. Kries hält Kant noch immer für einen großen Naturforscher. Er gibt nur zu, daß Kant nicht beobachtet habe. Aber es läßt sich zeigen, daß Kant neue Behauptungen über physikalische Dinge aufstellte, die er kinderleicht an der Erfahrung hätte prüfen können. Es fehlte ihm also der Sinn für Erfahrung. Dazu kommt, was v. Kries gar nicht berücksichtigt, daß Kant ebensowenig Sinn und Befähigung zum mathematischen Erfassen physikalischer Probleme besaß. Nur eine eigenartige Fähigkeit für untheoretisches, anschauliches mechanisches Denken war ihm eigen. Daher seine Erfolge gerade in Fragen der Mechanik.

Was die Naturphilosophie angeht, so findet v. Kries eine Anzahl von Widersprüchen zwischen Kant und der modernen Physik. Er löst sie durch den Hinweis auf die doppelte Natur unseres Wirklichkeitserkennens: die sinnliche Wahrnehmung und die intellektuelle Erfassung. Kant berücksichtigt nach ihm nur die erste, die Physik dagegen die zweite. Ich glaube nicht, daß diese Lösung zutrifft. Einige der gefundenen Widersprüche sind solche zwischen physikalischen Behauptungen Kants und der Physik, scheiden also zugunsten der Physik aus. Die übrigen lösen sich durch die Einsicht, daß Physik und Philosophie es mit verschiedenen Gegenstandsschichten zu tun haben.

Aloys Müller.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. G. Kirsch für Radioaktivität und Atombau, an der Universität Königsberg Dr. Robert Schmidt für reine Mathematik.

Ernannt: Der Privatdozent für anorganische Chemie an der Universität Göttingen Dr. G. Jander zum a. o. Professor ebenda, die Privatdozenten für Mathematik Dr. Gabriel Szegö an der Universität Berlin und Studienrat Dr. Fr. Willers an der Technischen Hochschule Berlin zu a. o. Professoren an den gleichen Hochschulen, Dr. E. Tagliatti zum a. o. Professor für Geometrie an der Universität Zürich, der Privatdozent für chemische Technologie spezieli Herstellung von Explosivstoffen an der Technischen Hochschule Budapest Dr. Aladar v. Vajdaty zum a. o. Professor ebenda, der Privatdozent an der Universität München Dr. Hans Heinrich Schlubach zum planmäßigen a. o. Professor für spezielle organische Chemie an der Universität Hamburg.

Gestorben: Der frühere ord. Honorarprofessor für Mathematik an der Universität Jena Hofrat Dr. Gottlob Frege.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G.

Physikalische Apparate

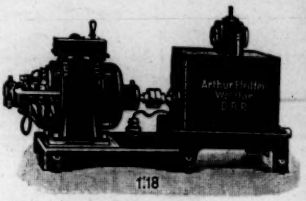
Demonstrations - Rundfunk - Empfangs - Apparate
Oelluftpumpen und Gebläse
Längen- und Kreisteilmaschinen
Komparatoren ✳ Funkeninduktoren
Megadiaskope ✳ Verdunkelungen
Experimentier-Schalttafeln
Laboratorienmöbel

Max Kohl A.-G. Chemnitz 4

Gründungsjahr 1876

Der Kauf von physikalischen Apparaten ist Vertrauenssache!

Pfeiffer's



Rotierende Öl-Luftpumpe D.R.P.

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe ganz aus Stahl D. R. P. angem.

15 Liter bis zum Aussetzen jeder Entladung in 10 Sek. vom Vorvakuum ab.

Listen von Abt. H anfordern.

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr. 1922, pag. 463.

Hochvakuum-Pumpen, Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 120 cbm per Stunde

Photometer aller Systeme

Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.

Funken-Induktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Oscillographen

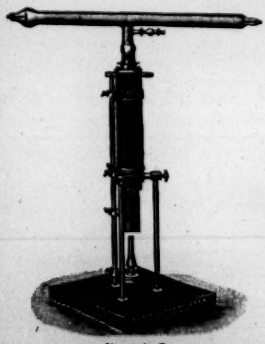
Arthur Pfeiffer
Wetzlar 8

Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall

nach Prof. Gaede

D.R.P. und Auslandspatente



$^1/_{10}$ nat. Gr.

Saugleistung: 15 Liter per Sek.

Vorvakuum: 20 mm

„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

E. Leybold's Nachfolger A.-G.

Köln a/Rhein, Brüderstr. 7

Sonderliste auf Wunsch

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.